Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France

Licence Science et Technologie
Spécialité Mathématiques
Option: Calcul différentiel 2009-2010

Série 6:
Extrema

Exercice 1. (Extrema)

Trouver les extrema de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

Exercice 2. (Extrema relatifs-absolus)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$:
(a) Déterminer ses extrema relatifs.

(b) f possède-t-elle un maximum absolu et un minimum absolu sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. (Extrema relatifs-absolus)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$

(a) Déterminer les extrema relatifs de f.

(b) f a-t-elle un maximum absolu et un minimum absolu sur $\mathbb{R}^3$?

(c) Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x + y \leq 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0\}$.

Déterminer $M = \sup_{(x,y)\in T} f(x,y)$ et $m = \inf_{(x,y)\in T} f(x,y)$.

Exercice 4. (Ellipsoïde)
On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Trouver, parmi les parallélépipèdes rectangles de côtés parallèles aux axes, inscrits dans cet ellipsoïde, celui dont le volume est maximum.

Exercice 5. (Parallélépipède rectangle)

Soient f et g les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x,y,z) = 2(xy + yz + zx)$, $g(x,y,z) = xyz - 1000$. On pose $P = (]1, 1000[)^3$, $A = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3; g(x,y,z) = 0\}$ $B = P \cap g^{-1}(0)$, $f_P = f|_P$.

(a) Montrer que A est un fermé de $\mathbb{R}^3$, que $A \cap \overline{P}$ est compact et que le minimum de $f_{A\cap\overline{P}}$ n'est atteint en aucun point de $(A \cap \overline{P})\backslash(A \cap P)$.

(b) Trouver les extrema de $f_{P|_B}$.

(c) En déduire les dimensions d'une boîte parallélépipédique rectangle ayant pour volume 1000 et d'aire minimale.

Exercice 6. (Multiplicateurs de Lagrange)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$. Trouver sa valeur maximale sur la courbe formée par l'intersection du plan d'équation $x - y + z = 1$ et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 7. (Distance minimum)

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\| \, . \, \|$ et de la distance euclidienne d. Soient Γ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et Δ la droite d'équation $x + y = 4$. Trouver les points $P \in \Gamma$ et $Q \in \Delta$, tels que $d(P, Q)$ soit minimum.

Indications: on remarquera que, si ces points existent, ils sont nécessairement dans $K = \overline{D}((0, 0), 5)$. On montrera qu'ils existent effectivement. Enfin, on ramènera leur recherche leur recherche à la détermination des extrema liés d'une certaine application de $U = \mathring{K} \times \mathring{K} = \mathring{D}((0, 0), 5) \times \mathring{D}((0, 0), 5)$ dans $\mathbb{R}$.