Immeubles de Bruhat-Tits :

Jean Lécureux :

Objectif : Etudier certains groupes (groupes classiques, certains groupes de matrices) en les faisant agir sur certains espaces (immeubles) géométriques et combinatoires

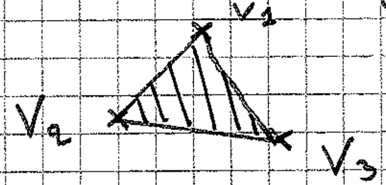
Exemple : L'immeuble de $Gl_n(k)$

k un corps, $V = k^n$; $G = Gl_n(k)$.

Définition : Un drapeau est une suite de s.e.v $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_k \subsetneq V$
Il est dit complet si $k = n-1$ et $\dim V_i = i$.

L'immeuble Δ associé à V est un complexe simplicial construit comme suit :

- Les sommets de Δ sont les s.ev de V (non triviaux)
- 2 sommets V_1 et V_2 sont reliés par une arête si $V_1 \subsetneq V_2$ ou $V_2 \subsetneq V_1$
- Dès que l'on a 3 sommets 2 à 2 reliés par des arêtes on remplit avec un triangle.



(i.e les triangles correspondent à des drapeaux de 3 s.ev de V)

- Les k-simplexes de Δ sont donnés par les drapeaux à k s.ev.

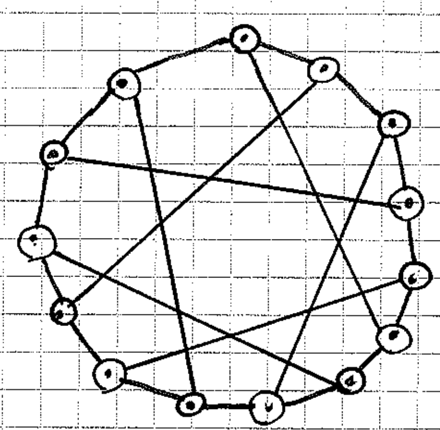
Exemple : $k = \mathbb{F}_2$, $n = 3$, $V = k^3$.

7 Droites, 7 plans

Prenons une droite, par exemple $(0,0,1)$. Dans quel plan est-elle contenue ?

$$\left.\begin{array}{l} \{(0,0,1) ; (0,1,0), (0,1,1)\} \\ \{(0,0,1), (1,0,1) ; (1,0,0)\}. \\ \{(0,0,1) ; (1,1,1), (1,1,0)\} \end{array}\right) \longrightarrow \text{il y a 3 plans.}$$

Dessin :



O plans

O droites

Remarque : Il y a plusieurs types de sommets, donnés par leur dimension.

Plus généralement, il y a plusieurs types de simplexes, donnés par la dimension des ss. espaces d'un drapeau.

G agit sur Δ (en préservant la structure simpliciale) et préserve le type.

Définition : Les simplexes de dimension maximale de Δ (i.e les drapeaux complets) s'appellent des chambres

Définition : Fixons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V. Un drapeau complet C de V est adapté à $\mathcal{B}$ (ou $\mathcal{B}$ est adapté à C) si il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$C = \left(\mathrm{Vect}(e_{\sigma(1)}) \subset \mathrm{Vect}(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}) \subset \cdots \subset \mathrm{Vect}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})\right)$$

Il y a $n!$ drapeaux adaptés à $\mathcal{B}$.

Définition : Un appartement est le sous-complexe de Δ formé par les drapeaux adaptés à une base.

Exemple : $n = 3$: un appartement est un hexagone.

Le groupe d'automorphismes d'un appartement est $W = \mathfrak{S}_n$. C'est le groupe de Weyl de l'immeuble.

Proposition : (*) (Base incomplète) Deux sommets sont toujours contenus dans un appartement.

* Plus généralement, 2 drapeaux sont toujours contenus dans un appartement.

Reformulation : Soit $C = (V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1})$ 2 drapeaux
$C' = (V_1' \subset V_2' \subset \dots \subset V_{n-1}')$ complets.

Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$, et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $V_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$

$$V_i' = \mathrm{Vect}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(i)})$$

De plus σ est unique.

Idée : On prend $\sigma(1) = \min\{i \mid V_1' \cap V_i' \neq \{0\}\}$
$\sigma(2) = \min\{i \mid \dim(V_2 \cap V_i') > \dim(V_1 \cap V_i')\}$
etc...

Application : Décomposition de Bruhat.

$$B = \begin{pmatrix} \diagdown & (*) \\ (0) & \end{pmatrix} < G.$$

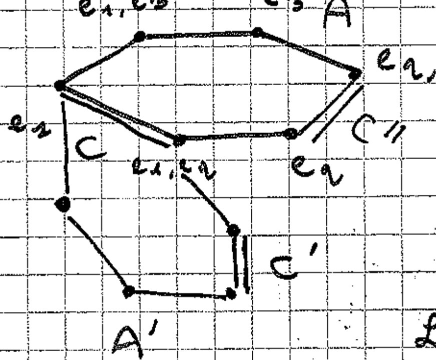
On relève W en matrices de permutations.
Alors :
$$G = \coprod_{w \in W} BwB$$

Preuve : $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de k^n donne une chambre $C = (\mathrm{Vect}(e_1) \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \subset \dots \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}))$ et un appartement de A.

Remarquons que $B = \mathrm{Stab}(C)$ et W agit sur A.

* B agit transitivement sur l'ensemble des appartements contenant C.
* W agit transitivement sur les chambres de A.

Soit $g \in G$. Soit $C' = g(C)$. Il existe un appartement A' contenant C et C'. Donc il existe $b \in B$ tel que $bA' = A$. Soit $C'' = b(C')$. Alors C'' appartient à A. Donc il existe $w \in W$ tel que $w(C'') = C$.



On a alors
$$wbgC = C.$$
Donc $wbg \in \mathrm{Stab}(C) = B$
i.e $wbg = b' \in B$ et $g = b'w^{-1}b' \in Bw^{-1}B$

On a donc $G = \bigcup_{w \in W} BwB$

L'unicité de w provient de l'unicité de σ dans la proposition précédente.

Remarque : Deux chambres C, C' sont adjacentes si elles partagent un simplexe de codim 1.

$\Leftrightarrow$ $\exists$ 1 base $(e_1, \dots, e_n)$ adaptée à C et C' tq
$C = \mathrm{Vect}(e_1) \subset \dots \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ et

$C' = \mathrm{Vect}(e_1) \subset \dots \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i+1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i, e_{i+1}) \subset \dots \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}))$
(autrement dit $\sigma = (i, i+1)$).

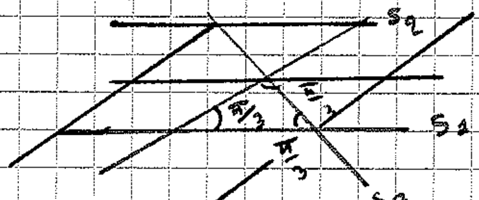
Définitions générales :

> **Définition** : Un groupe de Coxeter est un groupe W engendré par $S \subset W$ et avec une présentation :
> $$W = \langle s \in S \mid s^2 = 1,\ (st)^{m_{st}} = 1 \ \forall s, t \in S \rangle$$
> avec $m_{st} \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. ($\infty$ veut dire "pas de relation")
> $m_{st} \geq 2$; $m_{st} = m_{ts}$.

Exemple : • $W = \mathfrak{S}_n$; $S = \{(i, i+1) \mid i \leq n-1\}$.
Si $s_i = (i, i+1)$.
$(s_i s_j)^2 = 1$ si $|i-j| > 1$.
$(s_i s_{i+1})^3 = 1$.

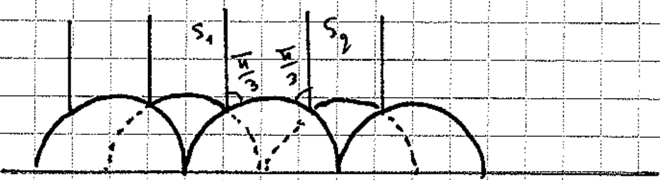
• $W = \{$ permutation signées $\}$.
$= \{ r \in GL_n(\mathbb{R})$ stabilisant $\{\pm e_i\}_{i=1}^n$, $(e_1, \dots, e_n)$ base fixée de $\mathbb{R}^n \}$
engendré par les $(i, i+1)$ et par les changements de signe r_i : $e_i \mapsto -e_i$, $e_j \mapsto e_j$ si $j \neq i$.

• Groupe de réflexions "affines" :
exemple : $W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_i^2 = 1,\ (s_1 s_2)^3 = 1 = (s_1 s_3)^3 = (s_2 s_3)^3 \rangle$



W agit sur le pavage du plan euclidien par des triangles équilatéraux.

• Groupes de réflexion hyperbolique :
$$W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_3)^3 = 1,\ s_i^2 = 1 \rangle$$
$$\simeq PGL_2(\mathbb{Z}).$$



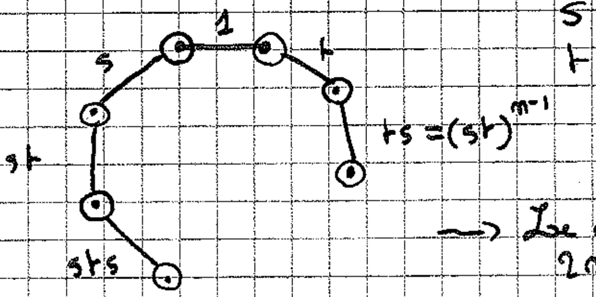
On va construire un complexe simplicial, appelé complexe de Coxeter comme suit.

Pour chaque élément de W, on prend un simplexe à $|S|$ faces i.e de dimension $|S|-1$. Chaque chambre ($=$ simplexe) maximal a donc $|S|$ faces qu'on étiquette par un élément de S.

Les simplexe $w \in W$ est recollé au simplexe ws le long de la face étiquetée par s.

Exemples :

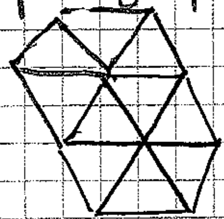
- $W = D_{2n}$ groupe diedral à $2n$ éléments
$$= \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^n = 1 \rangle.$$



→ Le complexe est un $2n$-gone.

- $W = D_\infty = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1 \rangle.$

- Groupe symétrique : une certaine triangulation de la sphère.
- W : groupe du pavage par des triangles équilatéraux.



→ on retrouve le pavage du plan.

Définition : Si $J \subset S$, le groupe engendré par J, noté W_J est appelé sous-groupe parabolique de W.

(W_J, J) est un système de Coxeter.

Définition : S'il existe $J_1, J_2 \subset S$ tels que :

- $J_1 \sqcup J_2 = S$
- $\forall s \in J_1, t \in J_2$, $(st)^2 = 1$ $(\Leftrightarrow st = ts)$

On dit que W est non irréductible.
Sinon, on dit que W est irréductible.

Si W est non irréd : $W_{J_1} \times W_{J_2} = W$.

Définition : La longueur d'un élément $w \in W$ est :
$$\ell(w) = \min\{k \mid \exists s_1, \dots, s_k \in S \mid w = s_1 \cdots s_k\}$$

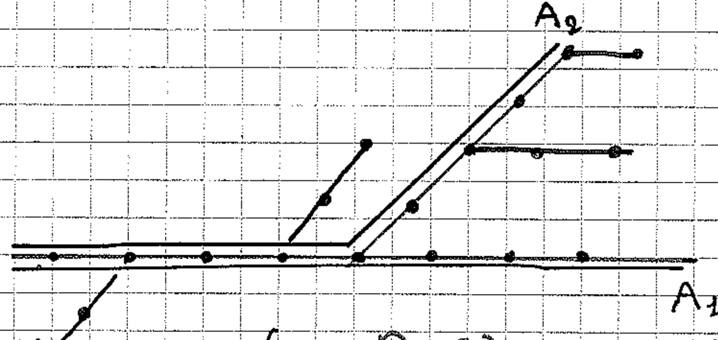
Définition 1: Un immeuble de type (W, S) est un complexe simplicial, muni d'une famille de sous-complexes appelés appartements tels que :

(i) Chaque appartem^t est isom au complexe de Coxeter de (W, S).

(ii) Deux simplexes de l'immeuble sont toujours contenus dans un appartement

(iii) Si A et A' sont 2 appartements, $\exists$ un isom $\phi : A \to A'$ tq $\phi_{A \cap A'} = Id$.

Exemple: $W = D_\infty$



Un immeuble de type $(W = D_\infty, S)$ est un arbre sans "feuille" ie sans sommet terminal

Exemple idiot: $W = \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$.

Les appartements sont juste 2 points. N'importe quel ensemble est un immeuble de type W. (appartement = paire de points).

Remarque: Le complexe de Coxeter lui-même est un immeuble.

Définition 2: Un immeuble est un ensemble $\mathcal{C}$ de chambres muni d'une fonction :

$$\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W \text{ t.q}$$

(i) $\delta(C, C') = 1 \iff C = C'$.

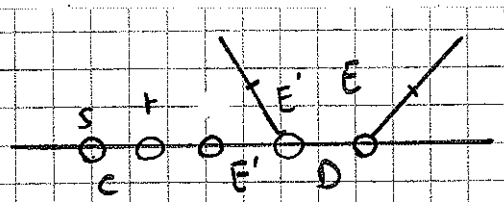
(ii) Si $\delta(C, D) = w$ et $\delta(D, E) = s \in S$ alors :

$$\delta(C, E) \in \{ws, w\}$$

et si $\ell(ws) > \ell(w)$, on a $\delta(C, E) = ws$.

(iii) Si $\delta(C, D) = w$ et si $\ell(ws) > \ell(w)$ il existe $E \in \mathcal{C}$ tq $\delta(C, E) = ws$.

Illustration sur un arbre:



$\delta(C,D) = \overbrace{tst}^{w}$

Si $\delta(D,E) = s$
alors $\delta(C,E) = tsts = ws$.

Si $E' \mid \delta(D,E') = t$, soit $\delta(C,E') = tst = w$
soit $\delta(C,E') = ts = tst.t = wt$.

<u>Equivalence des 2 définitions:</u>

* <u>Déf 1 $\Rightarrow$ Déf 2</u>.

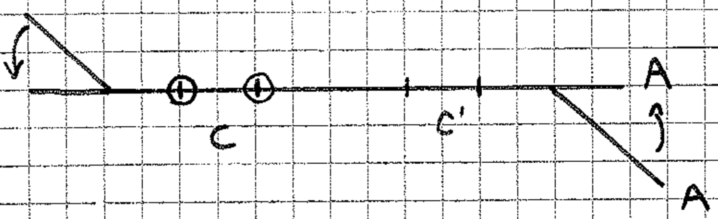
$\mathcal{C}$ est l'ensemble des chambres du complexe simplicial.
Soit $C, C' \in \mathcal{C}$. Il existe un appartement A contenant C et C'.

Dans cet appartement, chaque chambre est étiquetée par un élément de W. On suppose que C est étiqueté par 1.

On définit $\delta(C,C')$ comme l'unique élément de W qui étiquette C'.

Ça ne dépend pas du choix de l'appartement d'après (iii).

Si A' est un autre appartement contenant C et C', on a un iso entre A et A' fixant $A \cap A' \supset \{C, C'\}$.



(i) $\delta(C,C') = 1 \iff C = C'$ ok.
(iii) on met C et D dans un appartement et on prend $\bar{E}$ tel que $\delta(C,E) = ws$.

[Dans un complexe de Coxeter, il existe une unique façon d'étiqueter les chambres si l'on fixe que C est étiqueté par 1.

<u>En effet</u>: la chambre qui partage avec C la face de codim 1 étiquetée par s doit forcément porter l'étiquette s.]

Dans l'autre sens:

* <u>Déf 2 $\Rightarrow$ Déf 1</u>:

Pour chaque élément de $\mathcal{C}$, on se donne un simplexe de dimension $|S|-1$ dont les faces de codim 1 portent une étiquette $s \in S$.

Si C et C' sont telles que $\delta(C,C') = s$ on recolle les 2 simplexes suivant la face s.

Les appartements vont être tous les sous-complexes isomorphes au complexe de Coxeter.

[A retenir : on a la structure en appartements et une fonction $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W$ qui est donné par le type des faces d'un chemin reliant C à C'.

$\delta(C, C') = stu$.]

Groupes et immeubles :

Définition : Une action de G sur un immeuble Δ est dite fortement transitive si G agit transitivement sur les chambres et le stabilisateur d'une chambre C est transitif sur les appartements contenant C.

$\Leftrightarrow$ G est transitif sur les paires (C, A) où C est une chambre dans l'appartement A.

Supposons que G agit fortement transitivement sur Δ.
On fixe une chambre C dans un appartement A.

$B = \mathrm{Stab}_G(C)$; $N = \mathrm{Stab}_G(A)$.

On a $N / B \cap N \simeq W$.

Pour $w \in W$, on choisit un relevé $n_w \in N$.

Proposition : (Décomposition de Bruhat) $G = \coprod_{w \in W} B n_w B$

Démonstration : Exactement comme dans GL_n.

Réciproquement : si G a une décomp de Bruhat i.e $\exists B < G$
$C : W \to B \backslash G / B$ bijection.
on peut définir $\delta : G/B \times G/B \to W$

Définition : (Tits) On dit que G admet une **BN paire** si de plus $C(1) = B$.

$$C(w)\, C(s) = \begin{cases} C(ws) & \text{si } \ell(ws) > \ell(w) \\ C(ws) \cup C(w) & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème : Un groupe admet une BN-paire ssi il agit fortement transitivement sur un immeuble

$W_I < W$ s.g engendré par $I \subset S$.

Définition : Un sous-groupe parabolique de G est un conjugué d'un s.g de la forme :

$$\bigcup_{w \in W_I} B w B \quad \left(= \bigcup_{w \in W_I} C(w) \right)$$

C'est un sous-groupe de G. Si $w = s_1 \dots s_n \in W_I$ on peut prendre $s_i \in I$ et $\ell(w) = n$.

alors $C(w) = C(s_1 \dots s_{n-1}) C(s_n)$.

Lemme : Si $H < G$ qui contient B alors c'est un s.g parabolique de la forme : $\bigcup_{w \in W_I} BwB$ pour un $I \subset S$

Démonstration : Comme H contient B, H peut être vu comme une union de doubles classes modulo B i.e il existe $W' \subset W$ tel que,

$$H = \bigcup_{w \in W'} BwB$$

But mq : $W' = W_I$ i.e si $w = s_1 \dots s_n \in W'$ $\ell(w) = n$ alors $s_1, s_2, \dots, s_n \in W'$.

Par exemple si $w = st$, $s, t \in S$ tq $w \in W'$ alors :

$$C(st \cdot t) = C(st) \cup C(t).$$

En jouant avec le 2ᵉ axiome, on obtient que :

$$C(t) \subset H \quad \text{et} \quad C(s) \subset H.$$

Théorème : (Critère de simplicité) (Tits).

Si W est irréductible, G a une BN. paire de type W ; donc agit fortement transitivement sur un immeuble Δ et si $H \triangleleft G$ alors soit :

(i) H agit trivialement sur l'immeuble soit :
(ii) H agit transitivement sur les chambres de Δ ($\Leftrightarrow HB = G$)

Cas usuels : B est souvent résolubles, G un groupe parfait ($[G,G] = G$).

Dans ce cas : (ii) $\Rightarrow \underbrace{G/H}_{\text{parfait}} \simeq \underbrace{B/H \cap B}_{\text{résoluble}} \Rightarrow H = G$

Idée de la preuve du théorème :

On regarde le groupe H.B. C'est un s.g de G qui contient B, alors de la forme :
$$\bigcup_{w \in W_I} BwB.$$

H est normal donc I et $S \setminus I$ sont formés de générateurs qui commutent $\rightsquigarrow$ soit $\underset{(i)}{I = \emptyset}$, soit $\underset{(ii)}{I = S}$

(i) $H < B$ donc $H \subset \bigcap_{g \in G} gBg^{-1}$.

(ii) $HB = G$.

Théorème (Borel - Tits)

Si G est un groupe algébrique simple (ou réductif) alors G admet une BN-paire.

("Groupe algébrique" : s.g de $GL_n(k)$ qui peut être vu comme ensemble de zéros d'un polynôme.)

Corollaire (Tits)

Si k est alg clos, un groupe alg simple est simple.

("Groupe algébrique simple" : n'a pas de s.g normal algébrique non trivial)

Quels sont les groupes algébriques simples ?
Il y a une classification. De manière approximative.

- Type A_n : groupes $PSL_n(k)$.
- Types $B_n / C_n / D_n$: groupes préservant une forme quadratique ou symplectique
- Groupes "exceptionnels" (Chevalley) E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

Théorème (Tits) :

Soit Δ un immeuble de type (W, S) avec W fini et $|S| \geq 3$ et irréductible

Alors Δ est l'immeuble d'un groupe alg. simple, ou :

- d'un groupe de type $GL_n(k)$, k algèbre à division.
- d'un groupe stabilisant une forme quadratique. Par exemple sur $\mathbb{R}$ de signature (p, ∞)
- d'un groupe de type F_4 "tordu".

Théorème (Théorème fondamental de la géom projective) (Tits)

Soit Δ l'immeuble d'un groupe algébrique simple G alors tout automorphisme de Δ est la composée d'un élément de G et d'un automorphisme de corps.

Théorème de rigidité de Mostow.

Théorème : Soit G, G' 2 groupes de Lie simples et $\dim G, \dim G' \geq 3$ (par $PSL_2(\mathbb{R})$).

Supposons que $\Gamma < G$ et $\Gamma' < G'$ sont des s.g discrets, avec $G/_{\Gamma}$ et $G/_{\Gamma'}$ compact.

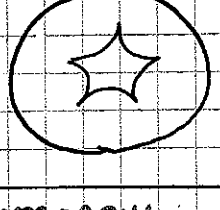
S'il existe $\theta : \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma'$ isomorphisme alors θ s'étend en un isomorphisme de G sur G'.

Exemples de "réseaux cocompacts"

i.e $\underset{\text{discret}}{\Gamma < G}$, $G/_{\Gamma}$ compact.

- $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.
- $G = PSL_2(\mathbb{R})$
  $\Gamma =$ un groupe de surface.

  G agit sur $\mathbb{H}^2$. Γ groupe de pavage du plan hyperbolique.



Remarque : • Si G est de "rang 1" (i.e G agit sur un espace hyperbolique) la preuve utilise des outils différents.

• Dans les autres cas on peut enlever l'hypothèse sur Γ' (Margulis).

Stratégie de la preuve :

On va se restreindre à $G = PGL_n(\mathbb{R})$
$G' = PGL_m(\mathbb{R})$.

$n, m \geq 3$ à partir de θ on va essayer de trouver un isomorphisme de l'immeuble de G vers l'immeuble de G'.

G agit sur son espace symétrique X.

$K < G$; $K = O_n(\mathbb{R})$ sous-groupe compact maximal :
$X = G/_K$ variété différentielle.

Décomposition polaire

$X \simeq$ {matrices symétriques définies positives} / homothéties
$\simeq$ {produit scalaires} / {homothéties}

Deux matrices symétriques sont diagonalisables dans une base communes.

Distances : $d\left(\begin{pmatrix} e^{a_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{a_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{b_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{b_m} \end{pmatrix}\right)$

$$= \|(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)\|_2$$

Si on se fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$, l'ensemble des matrice symétriques déf. pos. diagonales dans cette base est isométrique à $\mathbb{R}^{n-1}$.

On l'appelle un plat de X.

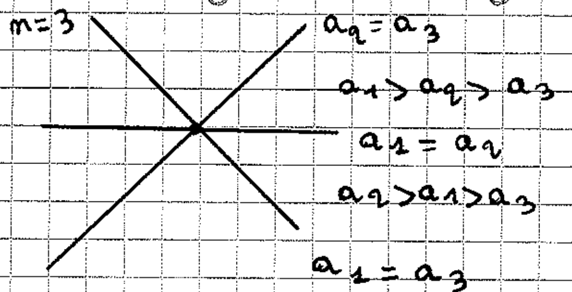
Deux points de X sont toujours dans un plat.

Regardons l'action de $\mathrm{Stab}_G(F)$ sur F :

$\mathrm{Stab}_G(F)$ peut : — multiplier les coefficients.
ou — permuter les coeffs.

Sur F cela revient à - faire une translation
ou - une permutation.

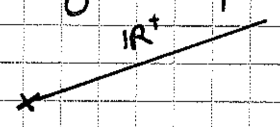
Il y a des directions invariantes par Stab(F) : celle où des coefficients diagonaux sont égaux.



$\rightsquigarrow$ F est partitionné (si on choisit une origine) en 6 $(= n!)$ composantes connexes qui sont des chambres de Weyl.

Bord visuel :

Un rayon géodésique est une isométrie $\gamma : \mathbb{R}_+ \to X$



Fait : Un rayon géodésique est toujours contenu dans un plat.

Définition : Le bord visuel $\partial_\infty X$ est l'ensemble de classes de rayons géodésiques où 2 rayons géodésiques γ et γ' sont équivalents s'ils restent à distance bornée, i.e :

$$\sup_t d(\gamma(t), \gamma'(t)) < +\infty.$$

Exemple : $\partial_\infty \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$

$\longrightarrow$ • Le bord d'un plat de X est une sphère.

• Les chambres de Weyl ont un bord qui définit une triangulation de la sphère.

$\rightsquigarrow$ il y a une structure de complexe simplicial sur $\partial_\infty X$.

Proposition : Cette structure définit l'immeuble associé à G.

Explication : La chambre de Weyl "$a_1 > a_2 > a_3$" définit un drapeau

$$\mathrm{Vect}(e_1) \subset \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$$

La direction "$a_2 = a_3$" définit une droite $\mathrm{Vect}(e_1)$.

Retour sur le théorème de Mostow :

$\Gamma < G$ discret, cocompact $\rightsquigarrow$ Γ agit sur X et $_\Gamma\backslash X$ est compact.
"groupe de pavage" de X.

On regarde Γ comme un espace métrique. On prend un système de générateurs S.

$d(1, x_1 \dots x_n) = n$ si $x_i \in S$ et n minimal.

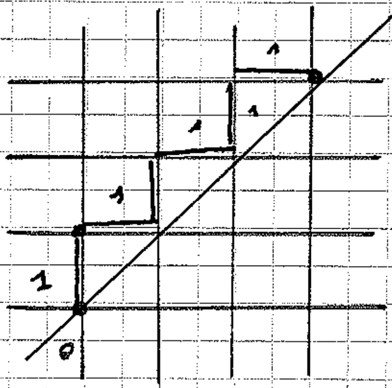
Définition : Une quasi isométrie $\phi : M \to M'$ (M et M' espaces métriques) est une application tq $\exists\, C > 1$, $A > 0$ tq

(i) $\frac{1}{C} d(x, x') - A < d(\phi(x), \phi(x')) < C d(x, x') + A$.

$\forall\, x, x' \in M$.

(ii) $\forall\, y \in M'\ \exists\, x \in M \mid d(y, \phi(x)) < A$.

Exemple : $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ est une quasi-isométrie engendrée par les vecteurs valant ± 1 à une coordonnée 0 ailleurs.



Fait général : Si Γ agit sur X par isométries discret dans $Isom(X)$ et $\Gamma \backslash X$ compact, $\gamma \mapsto \gamma . x_0$ est une quasi isométrie

Remarque : Une quasi isométrie a une "réciproque" qui est une quasi-isométrie

ie $\phi' : X' \to X$ q.I tq $d(\phi' \circ \phi(x), x) < A$ et $d(\phi \circ \phi'(x'), x') < A$

On a donc

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & X \\ \wr\wr & & \downarrow \\ \Gamma' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

On obtient une quasi-isométrie de X dans X', Γ-équivariante.

Théorème : (Mostow)

Si C est une chambre de Weyl de X, $\phi(C)$ est à distance bornée d'une unique chambre de Weyl de X'.

$\rightsquigarrow$ ϕ définit un isomorphisme de l'immeuble de G dans celui de G'.

Donc $G \simeq G'$.

Immeubles de Bruhat - Tits :

Si A est un anneau intègre commutatif, une valuation sur A $v : A \to \mathbb{Z}^n \cup \{+\infty\}$ telle que :

(i) $v(x) = +\infty \iff x = 0$.
(ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$
(iii) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

Si v est une valuation : $|x| = e^{-v(x)}$ est une valeur absolue

- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|xy| = |x||y|$.
- $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$.

Exemples typiques :

- K corps, $A = K[T]$.

$v(P) = i$ si $P = \sum_{j \geq i} a_j T^j$, $a_i \neq 0$

(Plus généralement, $v_a(P) = \max\{k \mid (X-a)^k \mid P\}$.

Si $P/Q \in K(T)$, on peut définir $v(P/Q) = v(P) - v(Q)$.

- Sur $\mathbb{Q}$, on prend p premier si $a \in \mathbb{Z}$:

$v_p(a) = \max\{k \mid p^k \mid a)$

et $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$.

Si A est un anneau avec une valuation, la valeur absolue est une distance sur A.

On peut regarder le complété (métrique) de A.

Exemple : (1) Si $A = K[T]$ Soit $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$.

$$P_n = \sum_{k \leq n} a_k T^k.$$

$$\underset{n \leq m}{|P_n - P_m|} = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k T^k \right| \leq e^{-n+1}.$$

$(P_n)_n$ suite de Cauchy $\to$ a une limite.

La limite est une série formelle $\sum_{k \geq 0} a_k T^k$

Le complété de $K[T]$ est $K[[T]]$.

Le complété de $K(T)$ est $K((T))$ corps des séries formelles de Laurent (ie de la forme :

$$\sum_{k \geq -n} a_k T^k \text{ pour } n \geq 0 \Big)$$

(2) Le complété de $\mathbb{Z}$ pour v_p est l'anneau des " entiers p-adiques". Le complété de $\mathbb{Q}$ est le corps des nombres p-adiques.

Un nombre p-adique s'écrit $\sum_{k \geq -n} a_k p^k$ $n \in \mathbb{N}$.
$0 \leq a_k \leq p-1$.

C'est un entier si on peut prendre $n = 0$.

A partir de maintenant, on fixe un corps K avec une valuation v et donc une valeur absolue $|\cdot|$.

Remarque : $\mathcal{O} = \{x \mid |x| \leq 1\}$ est un sous-anneau de K

- Pour $\mathbb{Q}_p$ on retrouve $\mathbb{Z}_p$.
- Pour $K((t))$ on retrouve $K[[t]]$.

But : voir que $SL_n(K)$ agit sur un immeuble, de type (W,S) où W est un groupe de pavage d'un espace affine.

Définition : Une norme ultramétrique sur $V = K^n$ est une application $n : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ t.q :

(i) $n(x) = 0 \iff x = 0$.
(ii) $\forall x \in V, \forall \lambda \in K \quad n(\lambda x) = |\lambda|\, n(x)$.
(iii) $n(x+y) \leq \max(n(x), n(y))$.

Exemple : Si $(e_1, \dots, e_n)$ base de V, on définit

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \max_{i=1\dots n} |x_i|$$

Plus généralement si $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*_+)^n$

$$n\left(\sum x_i e_i\right) = \max_{i=1\dots n} a_i |x_i|$$

$\longrightarrow$ G agit sur l'ensemble des normes par précomposition

On pose $X = \{\text{normes ultramétriques}\} / \{\text{homothéties}\}$.

But : X est un immeuble, identifier W ?

Définition : Une base $(e_1, \dots, e_n)$ est adaptée à une norme n si $\exists\, (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*_+)^n$ t.q :

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \max_{1 \leq i \leq n} a_i |x_i|.$$

Théorème : (Goldman - Iwahori)

Pour toutes normes n et n', il existe une base adaptée à n et n'

On définit un appartement de X comme l'ensemble des normes adaptées à une base fixée.

Sur un appartement, on met la métrique suivante :

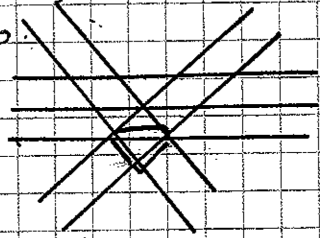
Si $n = \max a_i |x_i|$
$\quad n' = \max a_i' |x_i|$

$$d(n, n') = \left\| \log\left(\frac{a_1'}{a_1}\right), \dots, \log\left(\frac{a_n'}{a_n}\right) \right\|_2$$

Le stabilisateur de ω appartement agit sur cet appartement

- par permutation
- et translation entières.

Pour $n = 3$



$\longrightarrow$ pavage du plan par des triangles equilatéraux

K corps valué.
$G = GL_n(K)$

Sommets de la forme
$n\left(\sum x_i e_i\right) = \max |x_i|$

Si on fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$
Les normes adaptées à cette base forment un pavage de $\mathbb{R}^{n-1}$

Le groupe qui agit dessus est $\mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}^{n-1} = W$.

W est le groupe de Coxeter.
$W = \langle s_1 \dots s_{n+1} \mid s_i^2 = 1,\ (s_i s_{i+1})^3 = 1 \quad (s_{n+1} s_1)^3 = 1 \ (s_i s_j)^2 = 1 \rangle$.

En dimension 2 $SL_2(K)$ agit sur un immeuble de type D_∞.
L'immeuble associé est un arbre.

On peut vérifier que la valence d'un sommet est

(1) $p+1$ pour $K = \mathbb{Q}_p$.
(2) Si $K = k((t))$, c'est $|k|$.

<u>Stabilisateurs</u>:

Stabilisateurs du sommet

$$n\left(\sum x_i e_i\right) = \max |x_i|$$

$$g = (g_{ij}) \qquad \left|(gx)_i\right| = \left|\sum_j g_{ij} x_j\right|$$

$$\leq \max_j |g_{ij}||x_j|.$$

Le stabilisateur de n est $GL_n(\mathcal{O})$

<u>Remarque</u>: G agit transitivement sur les sommets et donc ne préserve pas le type des sommets.

Théorème (Bruhat-Tits) :

Soit G un groupe algébrique simple (ou réductif) sur K.
Alors G agit sur un immeuble de type (W, S) (Borel-Tits)
et G agit sur un immeuble de type (W_{aff}, S') où $W_{aff} = W \ltimes \mathbb{Z}^{n-1}$

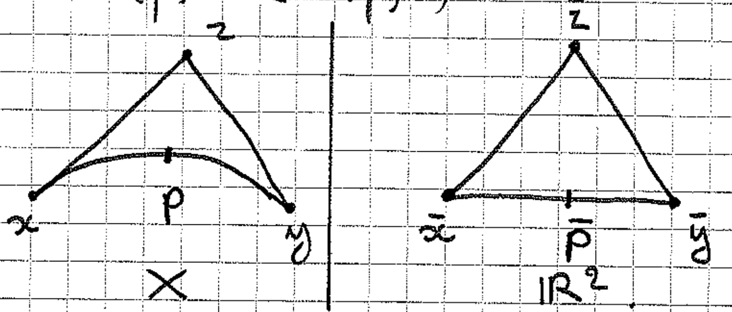
W_{aff} agit sur un espace euclidien de dimension $|S|-1$.

Les immeubles affines sont des espaces à courbure négative.

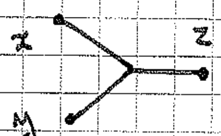
Définition : Un espace métrique est dit CAT(0) si :

$\forall x, y, z \in X$, $p \in [x\,y]$ (une géodésique entre x et y)
On prend des points $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^2$
tels que $d(x,y) = d(\bar{x}, \bar{y})$
$d(y,z) = d(\bar{y}, \bar{z})$
$d(x,z) = d(\bar{x}, \bar{z})$.
et $\bar{p} \in [\bar{x}, \bar{y}]$, $d(x,p) = d(\bar{x}, \bar{p})$

Alors on a $d(p,z) \leq d(\bar{p}, \bar{z})$



Exemples :
- $\mathbb{R}^n$ est CAT(0)
- Si une variété riemannienne est à courbure rationnelle ≤ 0 partout et est simplement connexe alors elle est CAT(0). (c'est une équivalence)
- Un arbre :



Les triangles sont complètement applatis.

Théorème : (Bruhat-Tits).

Un immeuble affine est un espace CAT(0).

Démonstration : On prend $x, y, z \in X$.

Distance sur X : si $x, y \in X$, on met x, y dans un appartement $A \simeq \mathbb{R}^{n-1}$.

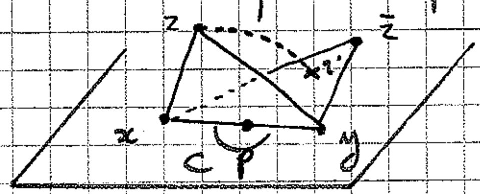
La distance dans X entre x et y est définie comme la distance dans A.

On va regarder le triangle de comparaison $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ dans un appartement $A \supset \{x, y\}$.

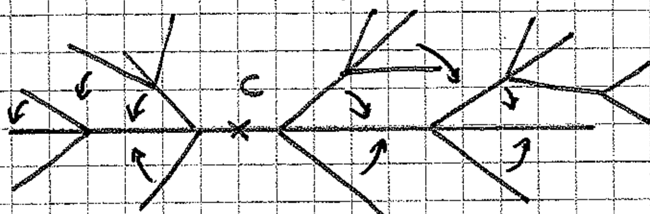
On prend $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

On prend $p \in [x, y]$ et $\bar{p} = p$.

<u>But</u> : démontrer que $d(p, z) \leq d(p, \bar{z})$



Pour cela, on va définir une rétraction sur A :



On fixe une chambre C contenant p

La rétraction $\rho_{C,A}$ sur A centrée en C associe à une chambre C' la chambre C'' définie comme suit :

On choisit un appartement A' contenant C et C'.

Alors il existe un isom $\phi : A' \to A$ entre A et A' fixant $A \cap A'$.
Cet isomorphisme est unique car $A \cap A'$ contient une chambre.
On pose :

$$C'' = \rho_{C,A}(C') = \phi(C')$$

<u>Propriétés de ρ_C</u> :

(1) $\forall a \in C, b \in X$, $d(a, b) = d(a, \rho_{C,A}(b))$

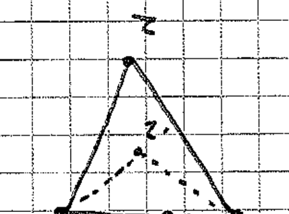
(2) $\rho_{C,A}$ est 1-lipschitzienne

$\forall a, b \in X$ $d(\rho_{C,A}(a), \rho_{C,A}(b)) \leq d(a, b)$

(3) Si $a \in A$ $\rho_{C,A}(a) = a$

$p \in C$, $\rho_{C,A}(z) = z'$.

Alors : (1) $d(p, z) = d(p, \rho_{C,A}(z)) = d(p, z')$
(2) $d(x, z') = d(\rho_{C,A}(x), \rho_{C,A}(z))$
$\leq d(x, z) = d(x, \bar{z})$.



<u>Exercice de géométrie dans $\mathbb{R}^2$</u>.

$x, y, z \in \mathbb{R}^2$, $p \in [x, y]$.
$z' \in \mathbb{R}^2$ | $d(x, z') \leq d(x, z)$
$d(y, z') \leq d(y, z)$

Alors $d(p, z') \leq d(p, z)$.

Pour un espace CAT(0), on peut définir son bord visuel comme pour l'espace symétrique.

(rayons géodésiques / distance bornée)

Le bord visuel de l'immeuble affine de $GL_n(K)$ est l'immeuble des drapeaux de K^n.

Plus généralement, le bord visuel de l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe simple G est l'immeuble de Borel-Tits (avec $|W| < +\infty$) de G.

Encore plus général : le bord visuel d'un immeuble affine est toujours **un** immeuble sphérique.

Théorème : (Tits).

Les immeubles affines (irréductibles) dont les appartements ont dimension ≥ 3 sont exactement les immeubles de Bruhat-Tits associés à des groupes algébriques simples sur des corps munis d'une valuation ou des groupes classiques sur de tels corps.

En dim 1, on a tous les arbres sans feuilles (pas algébriques)

En dim 2 :

(1) Il y a des contractions d'immeubles sans automorphismes (Génériquement, c'est toujours le cas (Barré-Pichot))

(2) Il y a des immeubles affines de dim 2 avec un groupe d'automorphismes qui est discret (par exemple simplement transitif sur les chambres)

(Cartwright - Steger - Mantero - Zappa).

__Question ouverte__ : Existe-t-il des immeubles affines dont le groupe d'automorphisme est non discret (ou fortement transitif) et qui ne soient pas des immeubles de groupes algébriques ou classiques ?

__Autres conséquences du fait que les immeubles sont CAT(0)__ :

(1) Un espace CAT(0) est contractile (application à la cohomologie des groupes)

(2) Théorème du point fixe (de Bruhat-Tits).

Théorème du point fixe (de Bruhat-Tits)

Soit X un espace $CAT(0)$ complet, $G < \mathrm{Isom}(X)$.
On suppose que G stabilise une partie bornée de X.

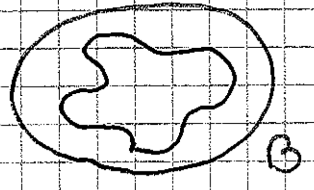
Alors G a un point fixe dans X.

Corollaire : Si $Q < \mathrm{Isom}(X)$ est compact, Q a un pt fixe.

Corollaire :

- Si $Q < GL(K)$ est un s.g compact alors Q est conjugué à un s.g de $GL(\mathcal{O})$.
- Si $Q < GL_n(\mathbb{R})$ s.g compact, Q est conjugué à un s.g de $O_n(\mathbb{R})$.

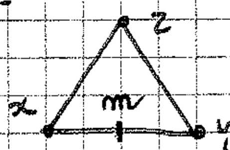
Démonstration : Soit B une partie bornée de X stable par G. Soit



$$r(B) = \inf\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \exists x \in X \mid B(x,r) \subset B \}$$

Lemme : Il existe un unique $x \in X$ tq $B \subset B(x, r(B))$

Démonstration : Unicité : Si x, y sont 2 tels centres $m \in [x,y]$ le milieu. Soit $z \in B$.



$$d^2(m,z) \leq d^2(\bar{m}, \bar{z})$$
$$= \frac{1}{2}\left(d^2(x,z) + d^2(y,z)\right) - \frac{1}{4} d^2(x,y)$$

$$\rightsquigarrow d^2(x,y) \leq 2\left(d^2(x,z) + d^2(y,z)\right) - 4 d^2(x,y)$$

On prend z tel que $d^2(m,z) \geq r(B)^2$.

$$d^2(x,y) \leq 2\Big(\underbrace{d^2(x,z)}_{\leq r^2(B)} + \underbrace{d^2(y,z)}_{\leq r^2(B)}\Big) - 4r^2 = 0$$

Donc $x = y$.

Existence : On prend une suite (x_n), (r_n) telle que :

$$B \subset B(x_n, r_n) \text{ avec } r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} r.$$

On utilise la même inégalité pour majorer $d(x_n, x_m)$ par $2(r_n^2 + r_m^2) - 4r^2 \to 0$

Donc (x_n) est une suite de Cauchy donc converge.

Autres exemples d'immeubles :

① Généraliser les constructions de groupes algébriques :

Groupes de Kac-Moody :

$SL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvections

$$\begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = Id + \lambda E_{ij}$$

On peut exprimer $SL_n(K)$ par générateurs et relations.

Générateurs : Pour $i \neq j$ on met une copie $U_{ij} \simeq (K, +)$.

Relations : La plupart des U_{ij} commutent, U_{ij} et U_{ji} engendrent une copie de $SL_2(K)$.

Certains engendrent des groupes nilpotents.

On peut décrire ces relations de manière purement combinatoire, à partir du diagramme de Dynkin de SL_n

En général : Chevalley permet de construire des groupes alg simples à partir de tous les diagrammes de Dynkin. (matrice de Cartan)

Groupes de Kac-Moody :

A partir d'une "matrice de Cartan généralisée", on peut définir des groupes par générateurs et relations. "groupes de Kac-Moody".

Un exemple non directement algébrique :

$$SL_n(K[t, t^{-1}]) < SL_n(K((t))) \times SL_n(K((t^{-1})))$$

En général un groupe de Kac-Moody Λ agit sur deux immeubles X_+ et X_-.

Si K est fini (de cardinal assez grand).

$\Lambda < \underbrace{Aut(X_+)}_{\text{groupe loc}^t\text{ compact}} \times Aut(X_-)$ est discret de covolume fini.

> **Théorème (Caprace - Rémy) :**
>
> Si le groupe de Weyl de X_+ et X_- est irréductible, infini non affine, alors Λ est un groupe simple (si K est fini et de cardinal > 4) engendré par un nombre fini d'éléments

② Constructions géométriques d'immeubles :

Un exemple de groupe de Coxeter géométrique.

A partir d'un hexagone à angles droit dans $\mathbb{H}^2$

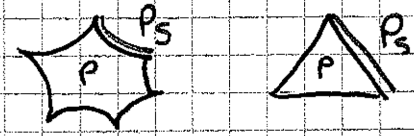
Le groupe W engendré par les réflexions par rapport aux côtés est un groupe de Coxeter

On n'a pas envie de construire un complexe simplicial comme au début du cours.

On va simplement recoller des hexagones à angles droits sur leur côtés.

> **Définition** (Davis. Vinberg) :
> Une structure-miroir est un espace métrique P, avec des sous-espaces $\phi \neq P_s$ pour chaque $s \in S$.

Exemples :



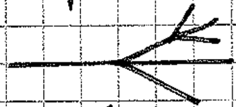
Si P est une structure miroir et $\mathcal{C}$ l'ensemble des chambres d'un immeuble (ie $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W$ tq ...)

La réalisation géométrique de X est l'espace $\mathcal{C} \times P /\sim$ avec $(\underset{\in \mathcal{C}}{C}, \underset{\in P}{x}) \sim (C', x')$ si $\delta(C, C') = s$ et $x = x' \in P_s$.

Un exemple avec un polygone à angles droits (Bourdon).

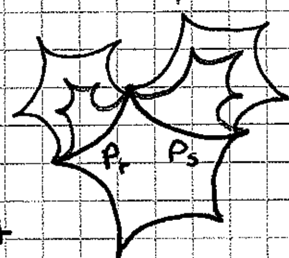
On fixe $q \geq 3$, et un polygone P à $p \geq 5$ côtés angles droits

On fait des recollements successifs

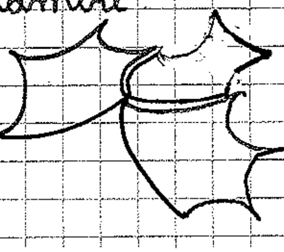


On part d'une copie de P. Sur chaque côté on colle q copies de P

Si P_s et P_t sont deux côtés adjacents de P



Pour chaque couple de chambres recollées sur P_s et P_t on rajoute une 4^{me} chambre entre les 2.



On obtient un immeuble $I_{p,q}$.

$\mathrm{Isom}(I_{p,q})$ agit fortement transitivement.

Il y a un s.g $\Gamma_{p,q} = \langle s_i \mid i = 1 \dots p \mid s_i^q = 1,\ [s_i, s_{i+1}]^2 = 1 \rangle$

$\Gamma_{p,q}$ agit simplement transitivement sur les chambres
$\Gamma_{p,q} \subset \mathrm{Isom}(I_{p,q})$ discret cocompact.

Théorème de rigidité de Mostow (Bourdon) :

Si $\Gamma < \mathrm{Isom}(I_{p,q})$, $\Gamma \simeq \Gamma'$, $\Gamma' < \mathrm{Isom}(I_{p',q'})$ s.g discrets cocompacts,

alors $p = p'$, $q = q'$ et l'iso $\Gamma \simeq \Gamma'$ est donné par une conjugaison.

Si W est le groupe d'un pavage de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$

On peut construire des immeubles de type (W,S) avec des gros groupes d'isométries (Gaboriau - Paulin).

Théorème (Haglund. Paulin)

$\mathrm{Isom}(I_{p,q})$ est un groupe simple.

Sur les groupes de Coxeter généraux, on peut toujours construire un "bon" espace sur lequel W agit.

Construction de Davis. Moussong :

C'est une structure miroir pour laquelle la réalisation géométrique Σ du complexe de W a les propriétés suivantes

- Σ est localement fini.
- L'action est proprement discontinue.
- Σ est un espace métrique CAT(0).

Conséquence Tout immeuble a une réalisation géométrique qui est un espace CAT(0).

$W = \langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = 1,\ (st)^2 = 1 \rangle$