

Intégration Produit dans L^1

Hanane KABOUL

ICJ Saint Etienne

hanane.kaboul@univ-st-etienne.fr

Avril 2014

Contenu

1 Rappel

- Mode de convergence
- Théorie générale
- Méthodes basées sur une projection
- Méthode de Nyström

2 Méthode d'intégration produit

- La méthode d'intégration produit dans $C^0([a, b])$
- La méthode d'intégration produit dans $L^1([a, b])$

Définition des équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $\kappa : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction absolument intégrable appelée noyau.

Soit X un espace fonctionnel de Banach, et un opérateur compact $T : X \rightarrow X$ défini par

$$(Tx)(s) = \int_D \kappa(s, t)x(t)dt$$

Pour $y \in X$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on s'intéresse à la résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm de 2^{ème} espèce :

$$(T - zI)\varphi = y.$$

Modes de convergence

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'opérateurs linéaires continus de X dans lui même ,

La convergence en norme

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

$$A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A.$$

La convergence collectivement compacte

- 1) $\forall x \in X : A_n x \rightarrow Ax, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$
- 2) $\exists n_0$ tel que l'ensemble $\{A_n x, n \geq n_0, \|x\| \leq 1\}$ est relativement compact.

$$A_n \xrightarrow{cc} A.$$

Modes de convergence

La ν -convergence

- 1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$.
- 2) $\|(A - A_n)A\| \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$.
- 3) $\|(A - A_n)A_n\| \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$.

$$A_n \xrightarrow{\nu} A.$$

Propriétés

$$A_n \xrightarrow{|||} A \implies A_n \xrightarrow{\nu} A$$

et

$$A_n \xrightarrow{cc} A \implies A_n \xrightarrow{\nu} A$$

Théorie générale

Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite d'approximations de T

théorème

$z \in \operatorname{re}(T) \cap \mathbb{C}^*$, si $T_n \xrightarrow{\nu} T$ Alors pour n assez grand l'opérateur $(T_n - zI)$ est inversible et $(T_n - zI)^{-1}$ est uniformément borné, de plus

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq \|(T_n - zI)^{-1}\| \|(T - T_n)\varphi\|.$$

Avec φ_n est la solution de

$$(T_n - zI)\varphi_n = y$$

Méthodes basées sur une projection $\pi_n \xrightarrow{p} I$

Opérateur de Kantorovich $T_n^K \xrightarrow{\nu} T$.

À $T_n^K = \pi_n T$, on associe les équations approchées suivantes

$$\begin{aligned}(\pi_n T - zI)\varphi_n^1 &= y, \\(\pi_n T - zI)\varphi_n^2 &= \pi_n y.\end{aligned}$$

Estimation

$$\begin{aligned}\|\varphi - \varphi_n^1\| &\leq \|(T_n^K - zI)^{-1}\| \|(I - \pi_n)T\varphi\| \\ \|\varphi - \varphi_n^2\| &\leq \|(T_n^K - zI)^{-1}\| [\|(\pi_n - I)T\varphi\| + \|(I - \pi_n)y\|]\end{aligned}$$

Méthodes basées sur une projection $\pi_n \xrightarrow{p} I$

Opérateur de Sloan $T_n^S \xrightarrow{\nu} T$.

$$T_n^S = T\pi_n.$$

Les équations approchées sont

$$\begin{aligned}(T\pi_n - zI)\varphi_n^3 &= y, \\ (T\pi_n - zI)\varphi_n^4 &= \pi_n y,\end{aligned}$$

Estimation

$$\begin{aligned}\|\varphi - \varphi_n^3\| &\leq \|(T_n^S - zI)^{-1}\| \|(I - \pi_n)T\varphi\|. \\ \|\varphi - \varphi_n^4\| &\leq \|(T_n^S - zI)^{-1}\| [\|T(\pi_n - I)\varphi\| + \|(I - \pi_n)y\|]\end{aligned}$$

Méthodes basées sur une projection $\pi_n \xrightarrow{p} I$

Opérateur de Galerkin $T_n^G \xrightarrow{\nu} T$.

$$T_n^G = \pi_n T \pi_n$$

On obtient les deux équations approchées

$$\begin{aligned}(\pi_n T \pi_n - zI)\varphi_n^5 &= y, \\(\pi_n T \pi_n - zI)\varphi_n^6 &= \pi_n y.\end{aligned}$$

Estimation

$$\begin{aligned}\|\varphi - \varphi_n^5\| &\leq \|(T_n^G - zI)^{-1}\| \|(T - T_n^G)\varphi\|. \\ \|\varphi - \varphi_n^6\| &\leq \|(T_n^G - zI)^{-1}\| \left(\|(T_n^G - T)\varphi\| + \|(I - \pi_n)y\| \right).\end{aligned}$$

Méthodes basées sur une projection $\pi_n \xrightarrow{p} I$

L'opérateur de Kulkarni $T_n^N \xrightarrow{\text{|||}} T$.

Proposé par REKHA P. KULKARNI en 2003.

$$T_n^N = \pi_n T \pi_n + \pi_n T (I - \pi_n) + (I - \pi_n) T \pi_n = \pi_n T + T \pi_n - \pi_n T \pi_n.$$

Les equations approchées sont

$$(T_n^N - zI)\varphi_n^7 = y,$$

$$(T_n^N - zI)\varphi_n^8 = \pi_n y,$$

Méthodes basées sur une projection $\pi_n \xrightarrow{p} I$

Estimation

$$\|\varphi - \varphi_n^7\| \leq \|(T_n^N - zI)^{-1}\| \|(I - \pi_n)T(I - \pi_n)\varphi\|.$$

$$\|\varphi - \varphi_n^8\| \leq \|(T_n^N - zI)^{-1}\| (\|(I - \pi_n)T(I - \pi_n)\varphi\| + \|(I - \pi_n)y\|).$$

Méthode de Nyström

Soit le schéma d'intégration numérique défini par :

$$\forall g \in C^0(D), \int_D g(t) dt \simeq \sum_{j=1}^{d_n} w_{n,j} g(t_{n,j}),$$

L'opérateur approché de T

$$(T_n x)(s) = \sum_{j=1}^{d_n} w_{n,j} \kappa(s, t_{n,j}) x(t_{n,j}).$$

L'équation intégrale approchée est

$$\forall s \in D, \sum_{j=1}^{d_n} w_{n,j} \kappa(s, t_{n,j}) \varphi_n(t_{n,j}) - z \varphi_n(s) = y(s).$$

Méthode de Nyström

Pour $s = t_{n,i}$, $i = 1, \dots, d_n$, on obtient le système linéaire

$$\sum_{j=1}^{d_n} w_{n,j} \kappa(t_{n,i}, t_{n,j}) \varphi_n(t_{n,j}) - z \varphi_n(t_{n,i}) = y(t_{n,i}), \quad i = 1, \dots, d_n.$$

Si ce système linéaire a une solution unique alors il existe une unique solution approchée vaut

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{z} \left[\sum_{j=1}^{d_n} w_{n,j} \kappa(s, t_{n,j}) \varphi_n(t_{n,j}) - y(s) \right]$$

Méthode de Nyström

Théorème

Soit $X = C^0(D)$, soit $z \in \text{re}(T) \cap \mathbb{C}^*$. Si κ est une fonction continue sur $D \times D$, et le schéma de quadrature est convergent pour toute fonction continue, alors pour n assez grand l'opérateur $T_n - zI$ est inversible, l'inverse est uniformément borné et

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq \|(T_n - zI)^{-1}\| \|(T - T_n)\varphi\|.$$

La méthode d'intégration produit dans $C^0([a, b])$

Soit $D = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et un noyau κ défini sur $[a, b] \times [a, b]$ de la forme

$$\kappa(s, t) = L(s, t)H(s, t).$$

On fait les hypothèses suivantes :

(H1) $L \in C^0([a, b] \times [a, b])$.

(H2) H vérifie :

$$(H2.1) \quad c_H = \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |H(s, t)| dt < \infty.$$

$$(H2.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \omega_H(h) = 0,$$

$$\text{avec } \omega_H(h) = \sup_{|s-\tau| \leq h, s, \tau \in [a, b]} \int_a^b |H(s, t) - H(\tau, t)| dt.$$

La méthode d'intégration produit dans $C^0([a, b])$

L'opérateur T défini par :

$$\forall x \in C^0([a, b]), \forall s \in [a, b] : Tx(s) = \int_a^b L(s, t)H(s, t)x(t)dt.$$

Proposition

T est défini de $C^0([a, b])$ dans lui-même. Il est linéaire et compact.

La méthode d'intégration produit dans $C^0([a, b])$

Soit $t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,n}$ une grille uniforme sur $[a, b]$, soit

$$h_n = \frac{b-a}{n}. \text{ On a } t_{n,i} = a + ih_n.$$

On définit pour $x \in C^0([a, b])$ et $s \in [a, b]$ l'interpolant linéaire suivant

Approximation

$$t \mapsto [L(s, t)x(t)]_n := \frac{1}{h_n} [(t_{n,i} - t)L(s, t_{n,i-1})x(t_{n,i-1}) \\ + (t - t_{n,i-1})L(s, t_{n,i})x(t_{n,i})],$$

où i est tel que $t \in [t_{n,i-1}, t_{n,i}]$.

La méthode d'intégration produit dans $C^0([a, b])$

Remplaçons $L(s, t)x(t)$ par $[L(s, t)x(t)]_n$, on obtient l'opérateur approché $T_n x(s) := \int_a^b [L(s, t)x(t)]_n H(s, t) dt$, $s \in [a, b]$ On peut exprimer T_n par :

$$T_n x(s) = \sum_{j=0}^n w_{n,j}(s) L(s, t_{n,j}) x(t_{n,j})$$

La méthode d'intégration produit dans $C^0([a, b])$

$$w_{n,0}(s) = \frac{1}{h_n} \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} (t_{n,1} - t)H(s, t)dt,$$

$$w_{n,n}(s) = \frac{1}{h_n} \int_{t_{n,n-1}}^{t_{n,n}} (t - t_{n,n-1})H(s, t)dt,$$

pour $j = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} w_{n,j}(s) &= \frac{1}{h_n} \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} (t - t_{n,j-1})H(s, t)dt \\ &\quad + \frac{1}{h_n} \int_{t_{n,j}}^{t_{n,j+1}} (t_{n,j+1} - t)H(s, t)dt. \end{aligned}$$

L'opérateur T_n est défini de $C^0([a, b])$ dans lui-même, il est linéaire et il est compact.

La méthode d'intégration produit dans $C^0([a, b])$

(H1) $L \in C^0([a, b] \times [a, b])$.

(H2) H vérifie :

$$(H2.1) \quad c_H = \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |H(s, t)| dt < \infty.$$

$$(H2.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \omega_H(h) = 0,$$

$$\text{avec } \omega_H(h) = \sup_{|s-\tau| \leq h, s, \tau \in [a, b]} \int_a^b |H(s, t) - H(\tau, t)| dt.$$

La méthode d'intégration produit dans $C^0([a, b])$

Théorème

Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour tout n assez grand l'opérateur $T_n - zI$ est inversible et l'inverse est uniformément borné. De plus

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq \|(T_n - zI)^{-1}\|_{C_H} \max_{s \in [a, b]} \omega(L(s, \cdot)\varphi(\cdot), h_n).$$

Théorème de Kolmogorov-M. Riesz-Fréchet

Théorème de compacité dans L^1

Soit $1 \leq p < +\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $\omega \subset \Omega$ tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et $\text{mes}(\omega) < +\infty$. F un sous ensemble de $L^p(\Omega)$ tel que :

(i) F est borné dans $L^p(\Omega)$,

(ii)

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} = 0 \text{ uniformément dans } F.$$

Alors le sous ensemble $F|_{\omega}$ de $L^p(\omega)$ est relativement compact.

La méthode d'intégration produit dans $L^1([a, b])$

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, T est un opérateur intégral défini par :

$$Tx(s) = \int_a^b L(s, t)H(s, t)x(t)dt,$$

(P1) $L \in C^0([a, b] \times [a, b])$.

(P2) H vérifie :

$$(P2.1) \quad c_H = \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |H(s, t)| ds < +\infty$$

$$(P2.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} w_H(h) = 0, \text{ où } w_H(h) = \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |\tilde{H}(s+h, t) - \tilde{H}(s, t)| ds.$$

L'opérateur T est défini de $L^1([a, b])$ dans lui-même. Il est linéaire et compact. La preuve repose sur le théorème Kolmogorov-M. Riesz-Fréchet.

La méthode d'intégration produit dans $L^1([a, b])$

Soit $\{t_{n,0}, t_{n,1}, \dots, t_{n,n}\}$ une grille uniforme de l'intervalle $[a, b]$, telle que

$$\text{Pour } j = 0, 1, \dots, n, \quad h_n := t_{n,j} - t_{n,j-1}.$$

On définit l'opérateur suivant pour tout $x \in L^1([a, b])$

$$\begin{aligned} t \mapsto [L(s, t)x(t)]_n &= \frac{1}{h_n} [(t_{n,i} - t)L(s, t_{n,i-1}) \\ &\quad + (t - t_{n,i-1})L(s, t_{n,i})] \frac{1}{h_n} \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} x(u) du \end{aligned}$$

où i est tel que $t \in [t_{n,i-1}, t_{n,i}]$.

On définit l'opérateur approché T_n par :

$\forall x \in L^1([a, b]), \forall s \in [a, b] :$

$$T_n x(s) = \int_a^b [L(s, t)x(t)]_n H(s, t) dt.$$

La méthode d'intégration produit dans $L^1([a, b])$

Ainsi on a

$$T_n x(s) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} x(u) du \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} \frac{1}{h_n} [(t_{n,i} - t)L(s, t_{n,i-1}) + (t - t_{n,i-1})L(s, t_{n,i})] \frac{1}{h_n} H(s, t) dt$$

On peut exprimer T_n par

$$T_n x(s) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}(s) \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} x(u) du$$

où

$$w_{n,i}(s) = \frac{1}{h_n} \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} [L(s, t)]_n H(s, t) dt$$

L'opérateur T_n est défini de $L^1([a, b])$ dans lui-même, il est linéaire et compact.

La méthode d'intégration produit dans $L^1([a, b])$

(P1) $L \in C^0([a, b] \times [a, b])$.

(P2) H vérifie :

$$(P2.1) \quad c_H = \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |H(s, t)| ds < +\infty$$

$$(P2.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} w_H(h) = 0,$$

$$\text{où } w_H(h) = \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |\tilde{H}(s+h, t) - \tilde{H}(s, t)| ds.$$

La méthode d'intégration produit dans $L^1([a, b])$

Théorème

Pour $z \in \text{re}(T)$, et sous les hypothèses (P1) et (P2), pour tout n assez grand l'opérateur $T_n - zI$ est inversible et l'inverse est uniformément borné. De plus

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{L^1([a,b])} \leq \|(T_n - zI)^{-1}\| (c_H \|\varphi\|_{L^1([a,b])} \sup_{s \in [a,b]} w(L(s, \cdot), h_n) + 4c_H c_L w_1(\varphi, h_n)),$$

La méthode d'intégration produit dans $L^1([a, b])$

Preuve

$$\tilde{T}_n x(s) = \begin{cases} T_n x(s) & \text{si } s \in [a, b], \\ 0 & \text{si } s \notin [a, b]. \end{cases}$$

$$A = \{ \tilde{T}_n x, n \geq 1, x \in L^1([a, b]), \|x\|_{L^1([a, b])} \leq 1 \}$$

$$A|_{[a, b]} = \{ T_n x, n \geq 1, x \in L^1([a, b]), \|x\|_{L^1([a, b])} \leq 1 \}$$

La méthode d'intégration produit dans $L^1([a, b])$

Exemple d'un noyau de convolution

Soit g une fonction définie de l'intervalle $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, faiblement singulière au sens suivant

- $\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = +\infty$
- $g \in C^0(]0, 1]) \cap L^1([0, 1])$.
- $g \geq 0^+$ et décroissante.

Références



E. Atkinson

The numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind.
Cambridge University press, 1997.



Haim Brezis

Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.
Springer, 2011.



Olivier Titaud

Analyse et Résolution Numérique de l'Equation de Transfert. Thèse de doctorat Université de Saint-Etienne, 2001.



Farida Hocine

Approximation Spectrale d'Opérateurs, Thèse de doctorat Université de Saint-Etienne, 1993.

Merci pour votre attention