Processus de Contact avec Vieillissement et Théorème de Forme Asymptotique

Aurelia Deshayes

sous la direction d'Olivier Garet et Régine Marchand
Institut Elie Cartan - Université de Lorraine

Colloque Inter'Actions 2014 en Mathématiques
Lyon
19 mai 2014

La loi exponentielle

On considère une particule dont la durée de vie T est une variable aléatoire positive **"sans mémoire"** i.e. pour tout $s > 0$:

$$\mathbb{P}(T \geq t + s | T \geq t) = \mathbb{P}(T \geq s).$$

La loi exponentielle

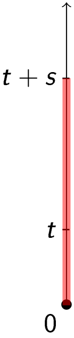
On considère une particule dont la durée de vie T est une variable aléatoire positive **"sans mémoire"** i.e. pour tout $s > 0$:

$$\mathbb{P}(T \geq t + s | T \geq t) = \mathbb{P}(T \geq s).$$

La loi exponentielle

On considère une particule dont la durée de vie T est une variable aléatoire positive **"sans mémoire"** i.e. pour tout $s > 0$:

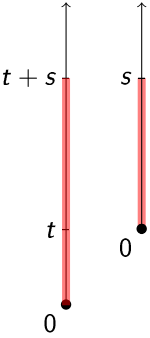
$$\mathbb{P}(T \geq t + s | T \geq t) = \mathbb{P}(T \geq s).$$



La loi exponentielle

On considère une particule dont la durée de vie T est une variable aléatoire positive **"sans mémoire"** i.e. pour tout $s > 0$:

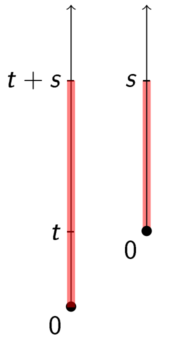
$$\mathbb{P}(T \geq t + s | T \geq t) = \mathbb{P}(T \geq s).$$



La loi exponentielle

On considère une particule dont la durée de vie T est une variable aléatoire positive **"sans mémoire"** i.e. pour tout $s > 0$:

$$\mathbb{P}(T \geq t + s | T \geq t) = \mathbb{P}(T \geq s).$$



Lemme

La durée de vie T d'une particule "sans mémoire" vérifie :

$$\mathbb{P}(T \geq t + s) = \mathbb{P}(T \geq t)\mathbb{P}(T \geq s).$$

Si T est continue, T est alors forcément une variable aléatoire exponentielle.

On parle aussi d'**horloge exponentielle**.

La loi exponentielle : propriétés

1 loi exponentielle

Soit $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$.

1. Fonction de répartition $\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t)$.
2. $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$.

La loi exponentielle : propriétés

1 loi exponentielle

Soit $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$.

1. Fonction de répartition $\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t)$.
2. $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$.

2 lois exponentielles

Soient $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \exp(\mu)$ indépendantes.

1. $\min(X, Y) \rightsquigarrow \exp(\lambda + \mu)$.
2. $\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Processus de Poisson

Définition

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ de Poisson de paramètre λ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

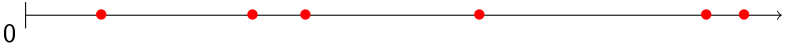
1. $N(0) = 0$, N est croissant,
2. si $t_1 < \ldots < t_k$, alors $N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ sont indépendantes,
3. Pour $s < t$, la loi de $N(t) - N(s)$ est $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$.

Processus de Poisson

Définition

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ de Poisson de paramètre λ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

1. $N(0) = 0$, N est croissant,
2. si $t_1 < \ldots < t_k$, alors $N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ sont indépendantes,
3. Pour $s < t$, la loi de $N(t) - N(s)$ est $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$.

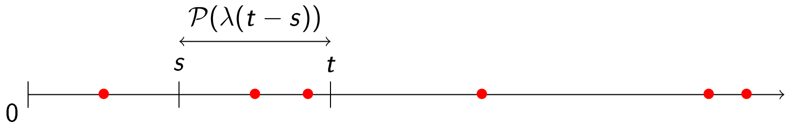


Processus de Poisson

Définition

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ de Poisson de paramètre λ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

1. $N(0) = 0$, N est croissant,
2. si $t_1 < \ldots < t_k$, alors $N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ sont indépendantes,
3. Pour $s < t$, la loi de $N(t) - N(s)$ est $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$.

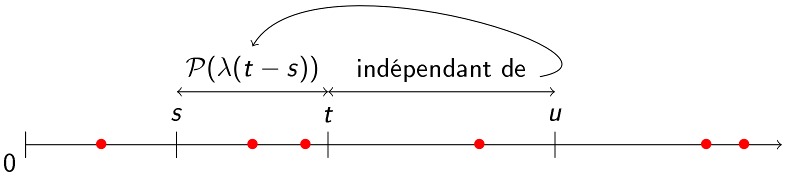


Processus de Poisson

Définition

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ de Poisson de paramètre λ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

1. $N(0) = 0$, N est croissant,
2. si $t_1 < \ldots < t_k$, alors $N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ sont indépendantes,
3. Pour $s < t$, la loi de $N(t) - N(s)$ est $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$.

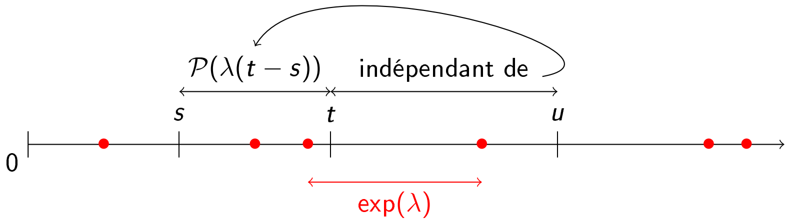


Processus de Poisson

Définition

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ de Poisson de paramètre λ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

1. $N(0) = 0$, N est croissant,
2. si $t_1 < \ldots < t_k$, alors $N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ sont indépendantes,
3. Pour $s < t$, la loi de $N(t) - N(s)$ est $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$.

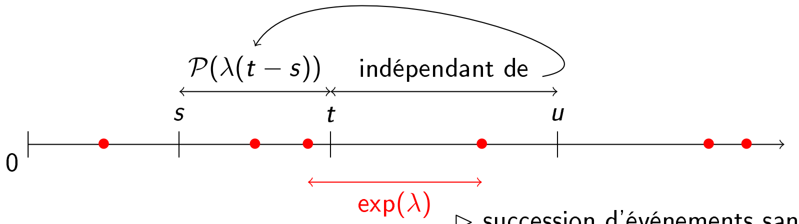


Processus de Poisson

Définition

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ de Poisson de paramètre λ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

1. $N(0) = 0$, N est croissant,
2. si $t_1 < \ldots < t_k$, alors $N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ sont indépendantes,
3. Pour $s < t$, la loi de $N(t) - N(s)$ est $\mathcal{P}(\lambda(t - s))$.



▷ succession d'événements sans mémoire

Processus de contact

Définition

Un **processus de contact** $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

Processus de contact

Définition

Un **processus de contact** $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Soit $z \in \mathbb{Z}^d$:

- z est mort (ou sain) si $\xi_t(z) = 0$.
- z est vivant (ou infecté) si $\xi_t(z) = 1$.

Processus de contact

Définition

Un **processus de contact** $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Soit $z \in \mathbb{Z}^d$:

- z est mort (ou sain) si $\xi_t(z) = 0$.
- z est vivant (ou infecté) si $\xi_t(z) = 1$.

L'évolution du système est :

- un site vivant meurt avec un taux 1,
- un site mort naît avec un taux dépendant de son nombre de voisins vivants,

Processus de contact

Définition

Un **processus de contact** $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Soit $z \in \mathbb{Z}^d$:

- z est mort (ou sain) si $\xi_t(z) = 0$.
- z est vivant (ou infecté) si $\xi_t(z) = 1$.

L'évolution du système est :

- un site vivant meurt avec un taux 1,
- un site mort naît avec un taux dépendant de son nombre de voisins vivants,

- Processus de Markov = (ici) construit à partir de Processus de Poisson.

Processus de contact

Définition

Un **processus de contact** $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Soit $z \in \mathbb{Z}^d$:

- z est mort (ou sain) si $\xi_t(z) = 0$.
- z est vivant (ou infecté) si $\xi_t(z) = 1$.

L'évolution du système est :

- un site vivant meurt avec un taux 1,
- un site mort naît avec un taux dépendant de son nombre de voisins vivants,

- Processus de Markov = (ici) construit à partir de Processus de Poisson.
- Propriété de Markov = Pour connaître $(\xi_t)_{t\geq\tau}$, il suffit de connaître ξ_τ (et non $(\xi_t)_{t<\tau}$).

Processus de contact

Définition

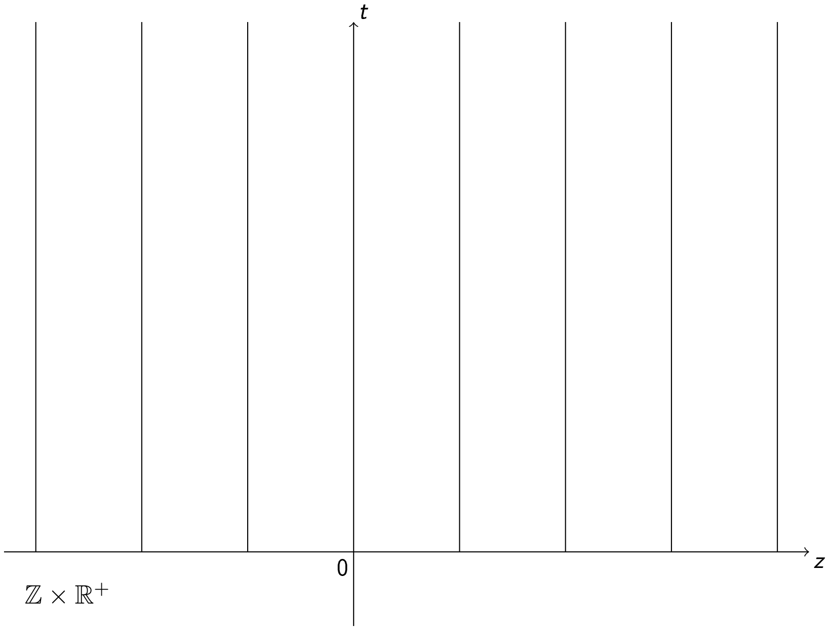
Un **processus de contact** $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Soit $z \in \mathbb{Z}^d$:

- z est mort (ou sain) si $\xi_t(z) = 0$.
- z est vivant (ou infecté) si $\xi_t(z) = 1$.

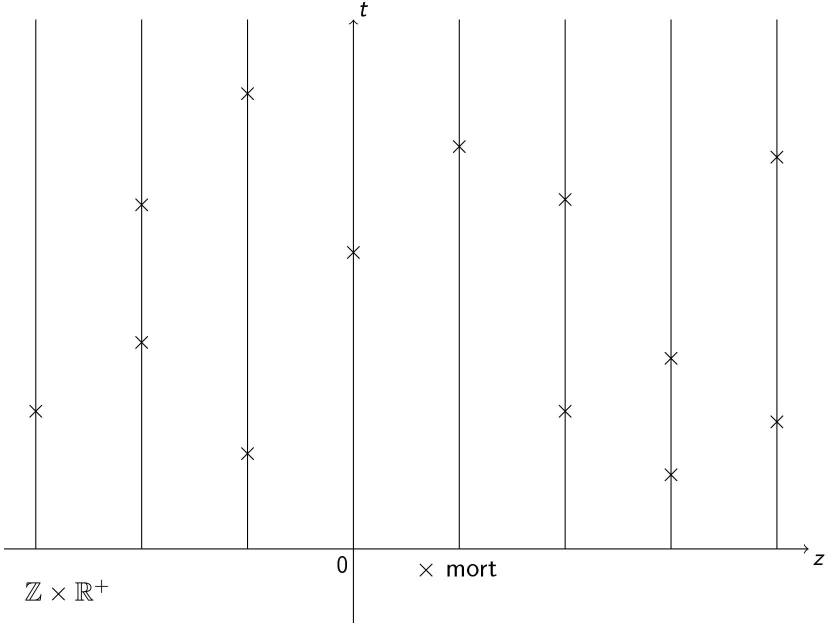
L'évolution du système est :

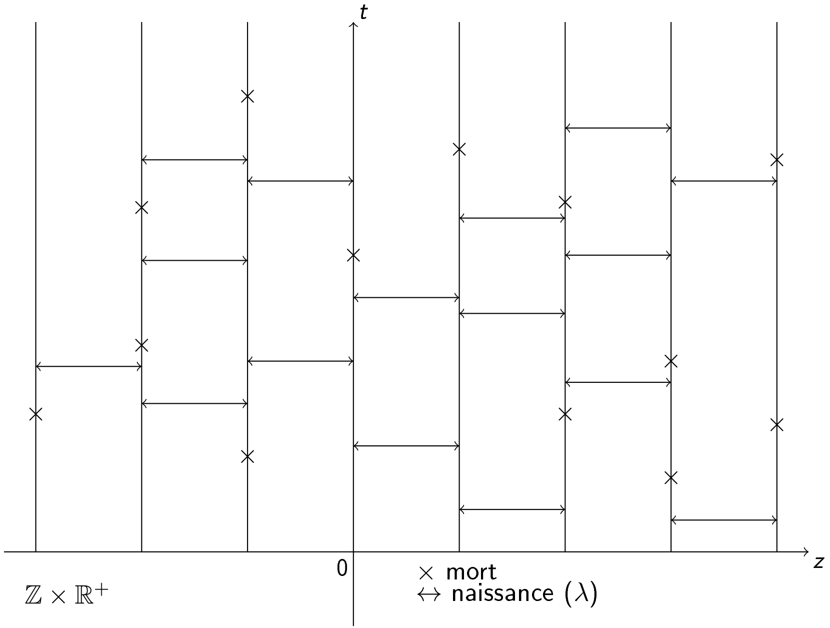
- un site vivant meurt avec un taux 1,
- un site mort naît avec un taux dépendant de son nombre de voisins vivants,

- Processus de Markov = (ici) construit à partir de Processus de Poisson.
- Propriété de Markov = Pour connaître $(\xi_t)_{t \geq \tau}$, il suffit de connaître ξ_τ (et non $(\xi_t)_{t<\tau}$).
- L'état initial ξ_0 du processus est un ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, souvent $\{0\}$.

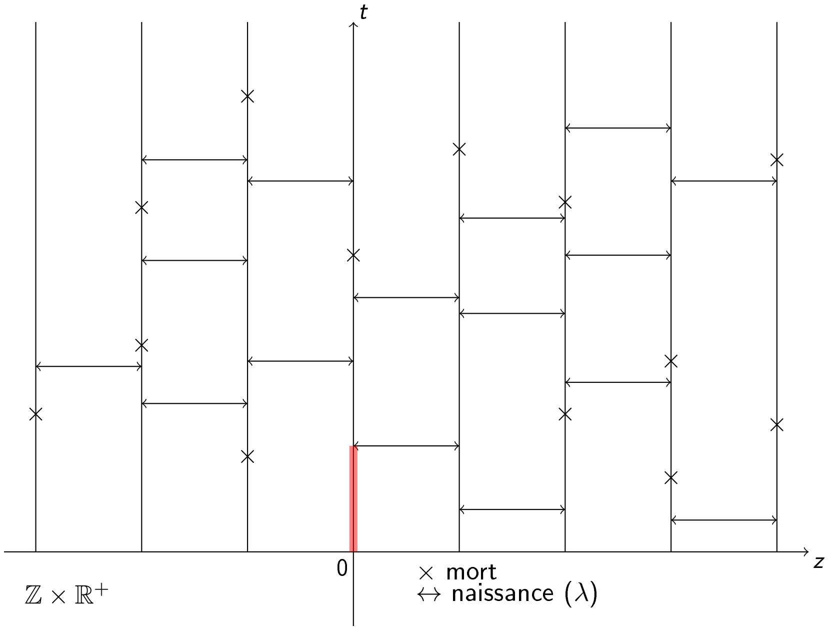


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

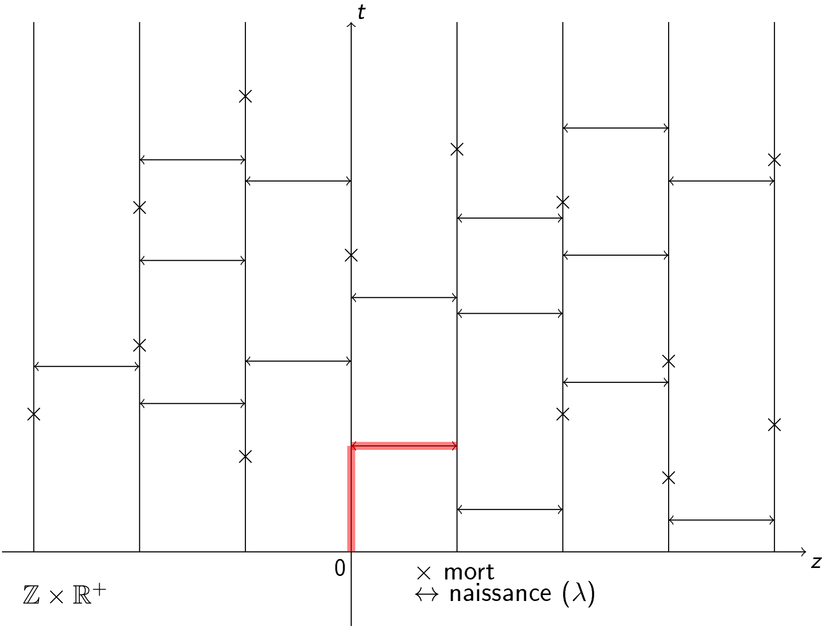

t
z
0
× mort
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

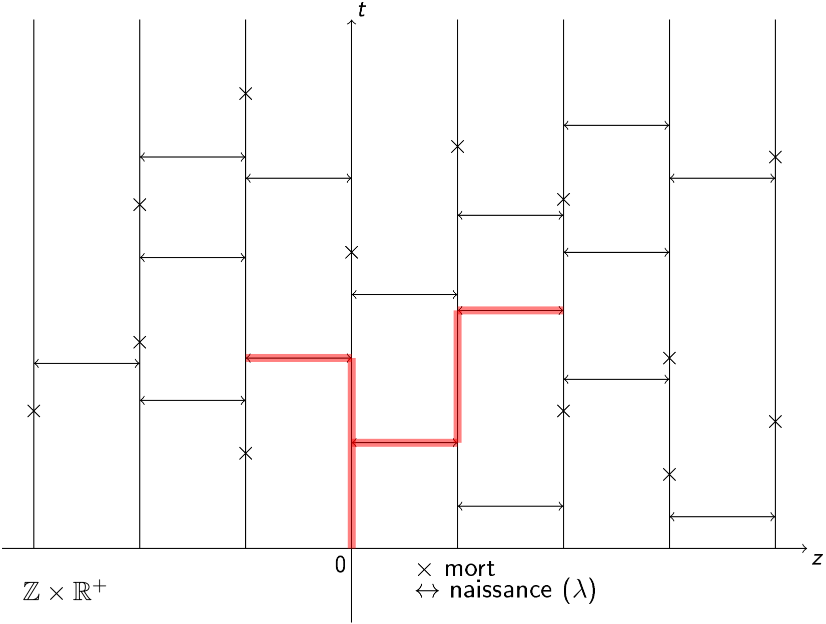


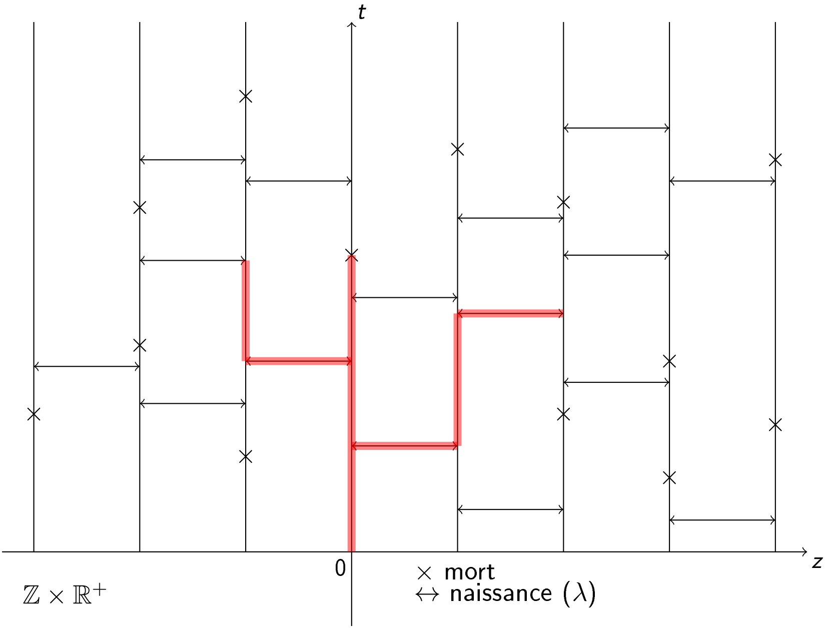
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



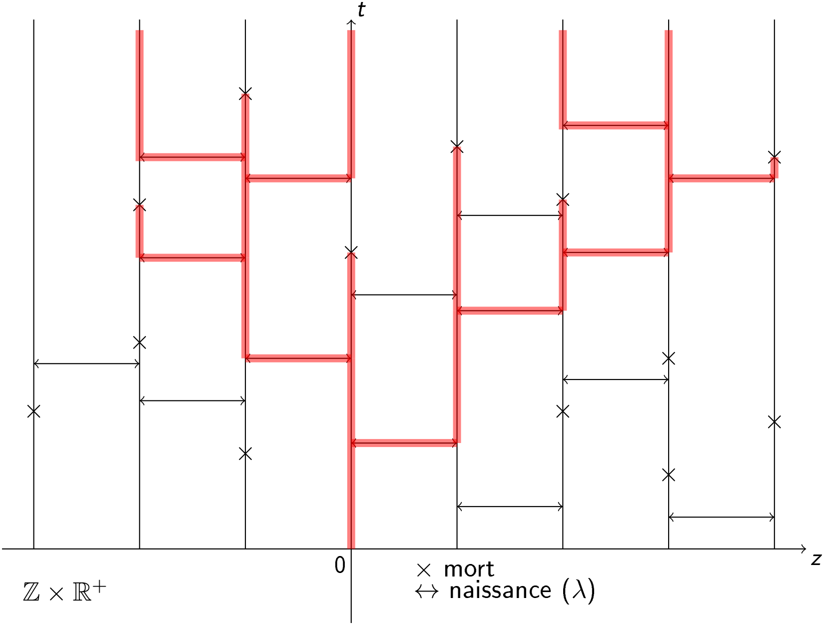
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$


t
0
z
× mort
↔ naissance (λ)
ℤ × ℝ⁺

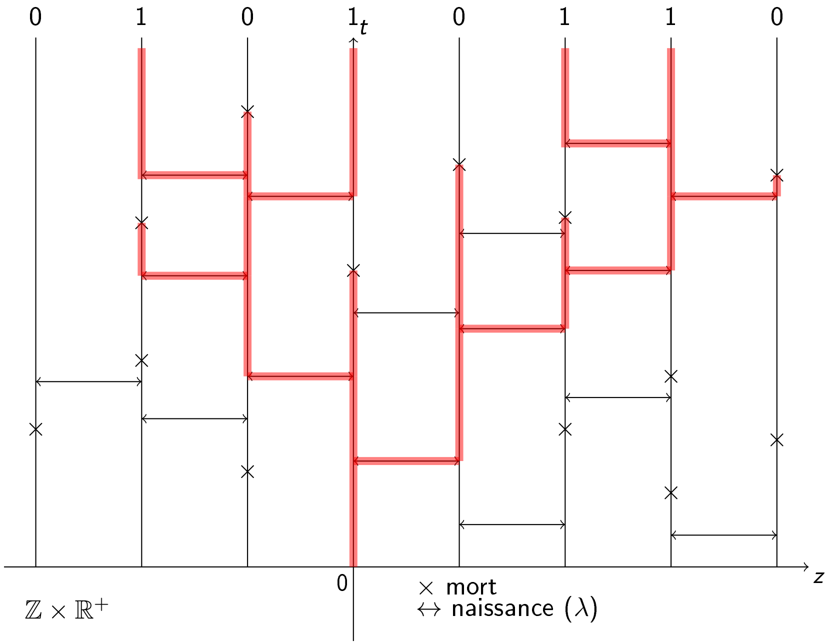

t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



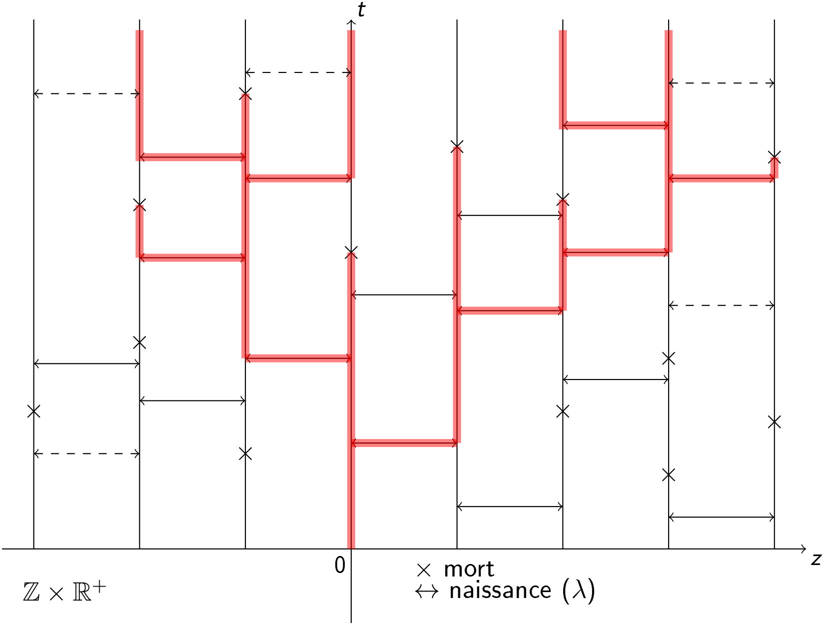
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

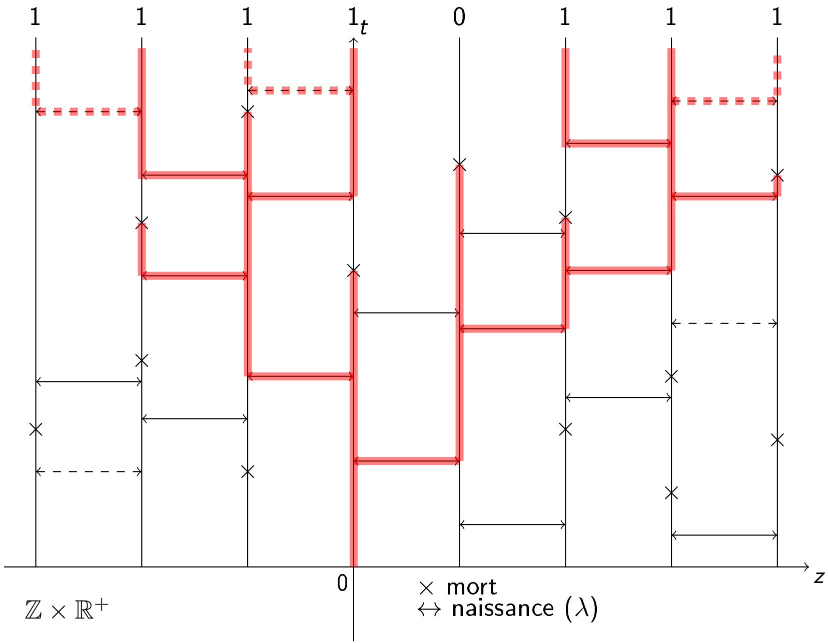


t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

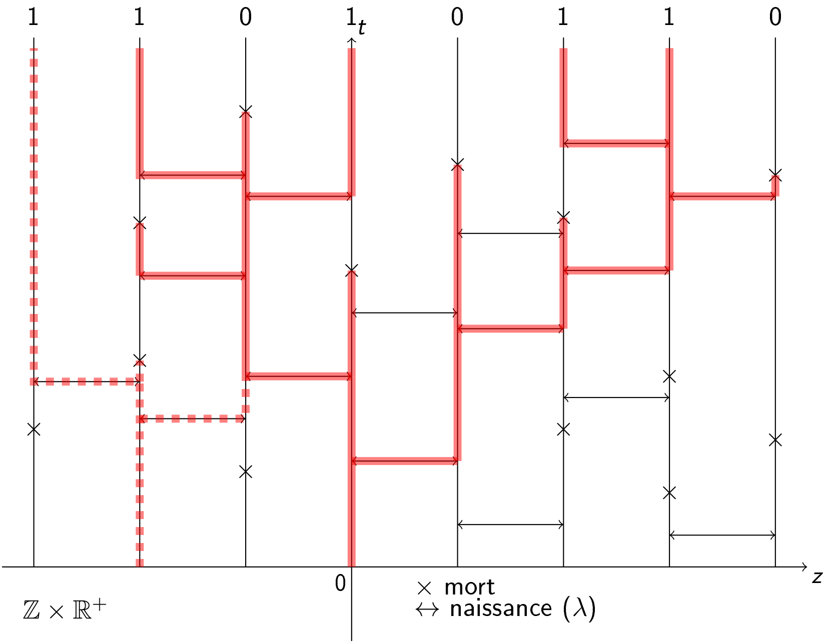


0 1 0 1 0 1 1 0
t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

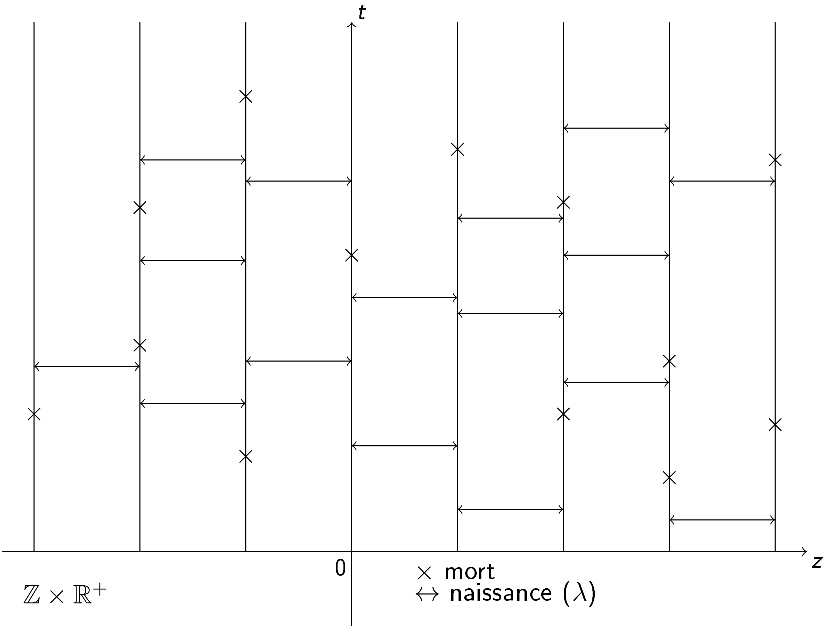

t
z
0
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



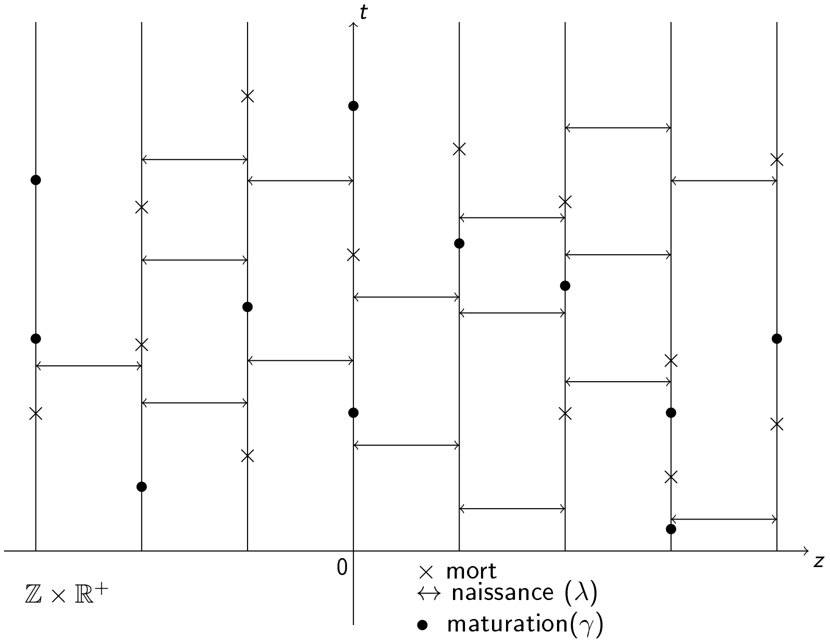
1 1 1 1 0 1 1 1
t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
ℤ × ℝ⁺



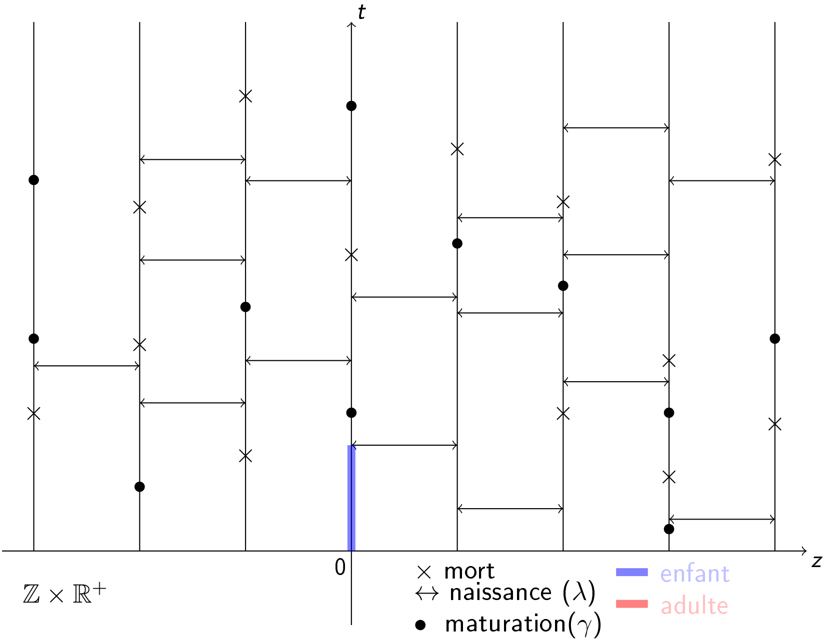
1 1 0 1 0 1 1 0
t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

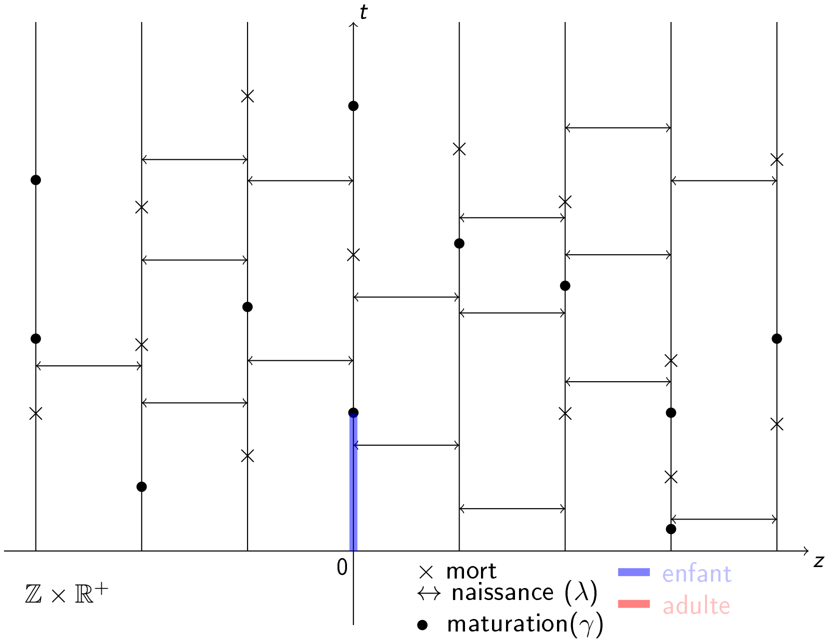


t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

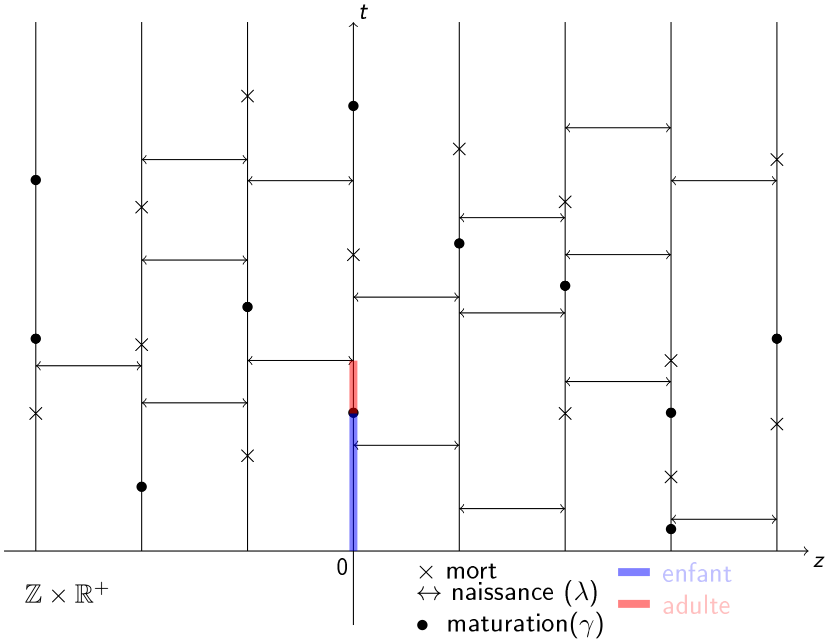


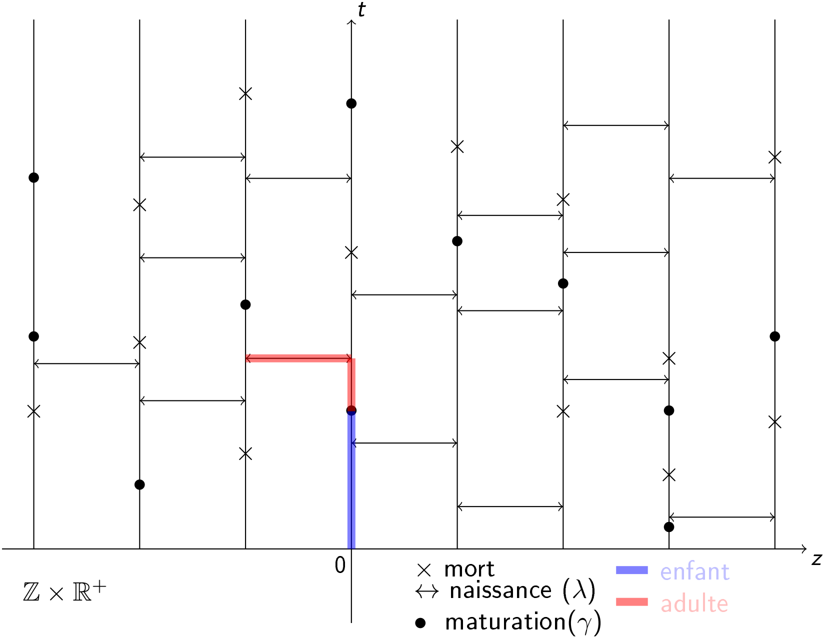
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
● maturation(γ)
enfant
adulte

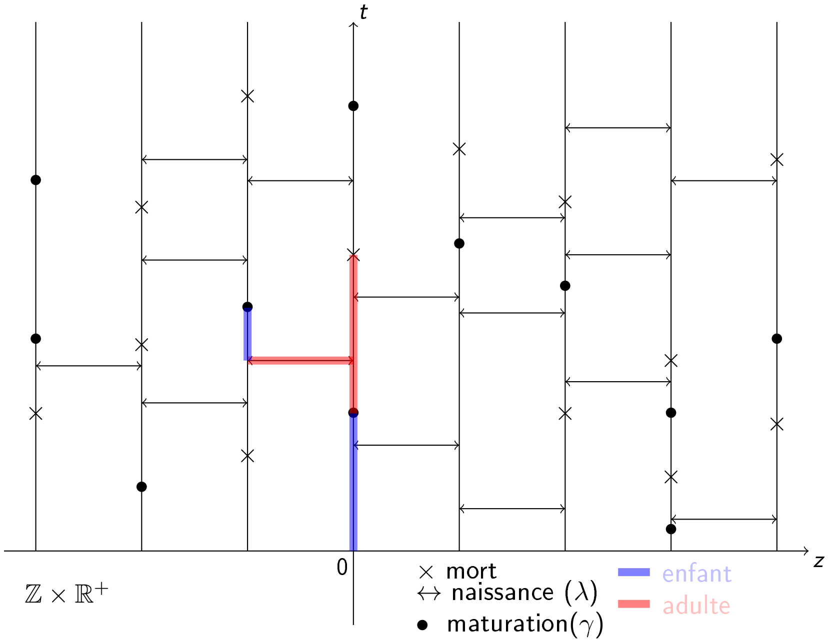


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte

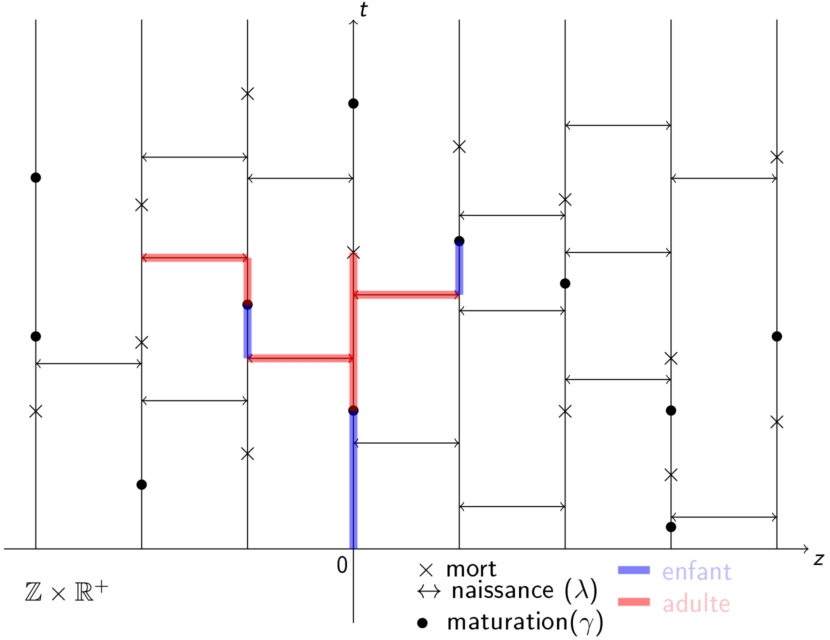

t
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



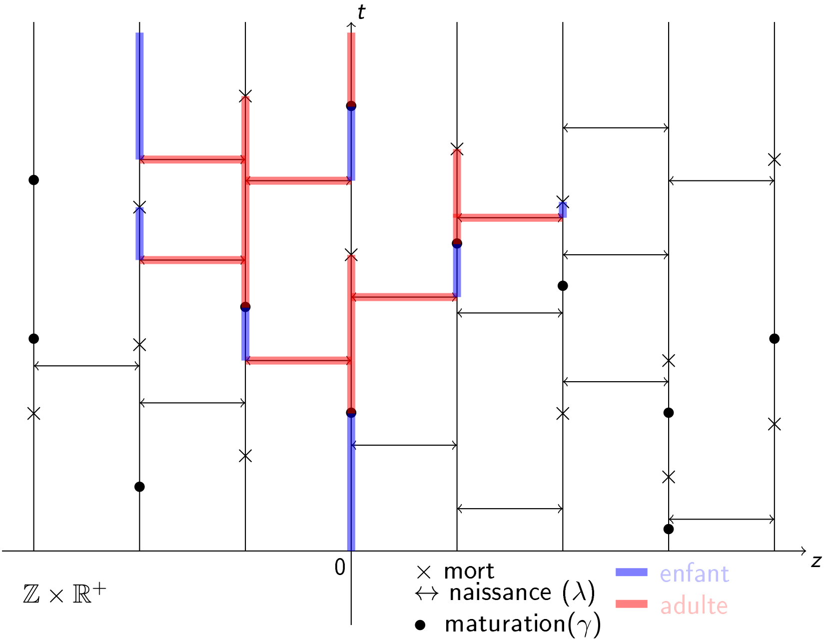
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
● maturation(γ)
enfant
adulte



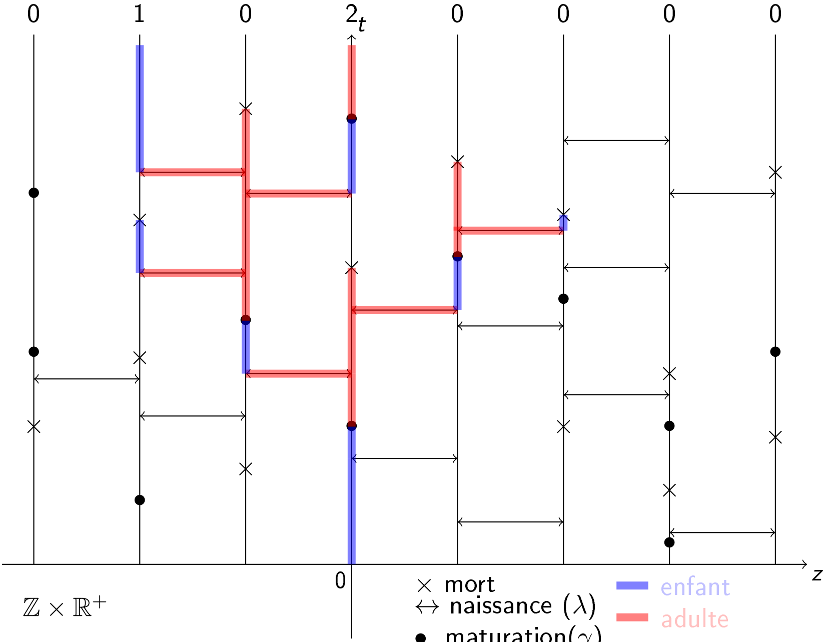
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte



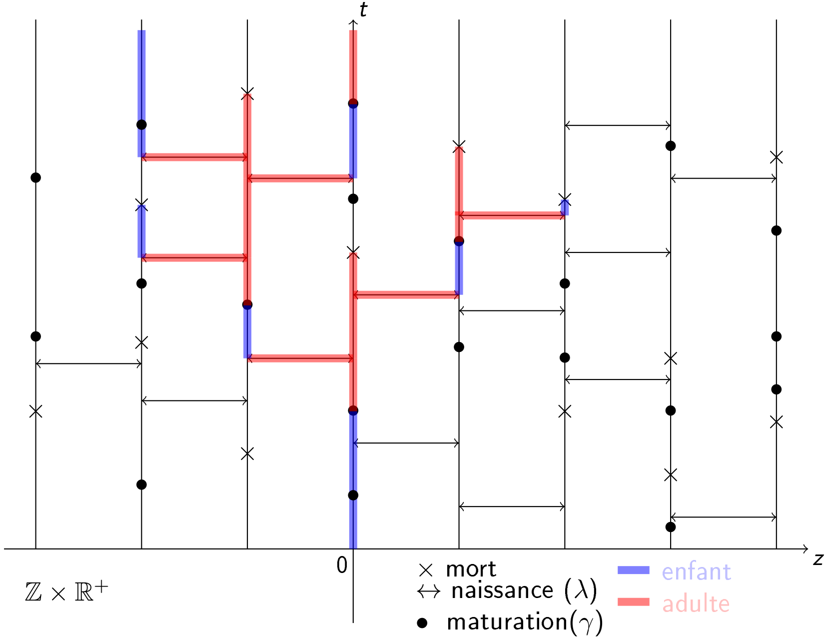
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
● maturation(γ)
enfant
adulte



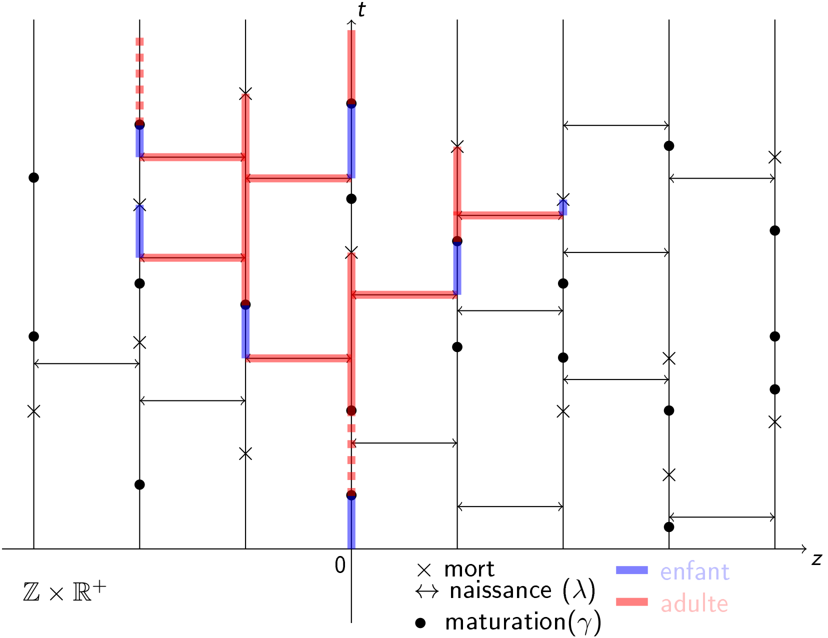
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte



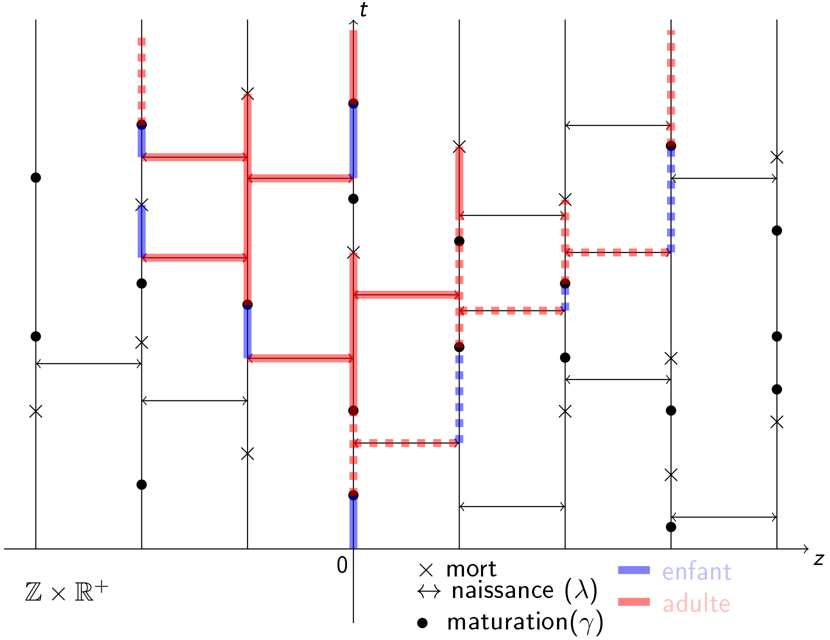
0
1
0
2
0
0
0
0
t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte



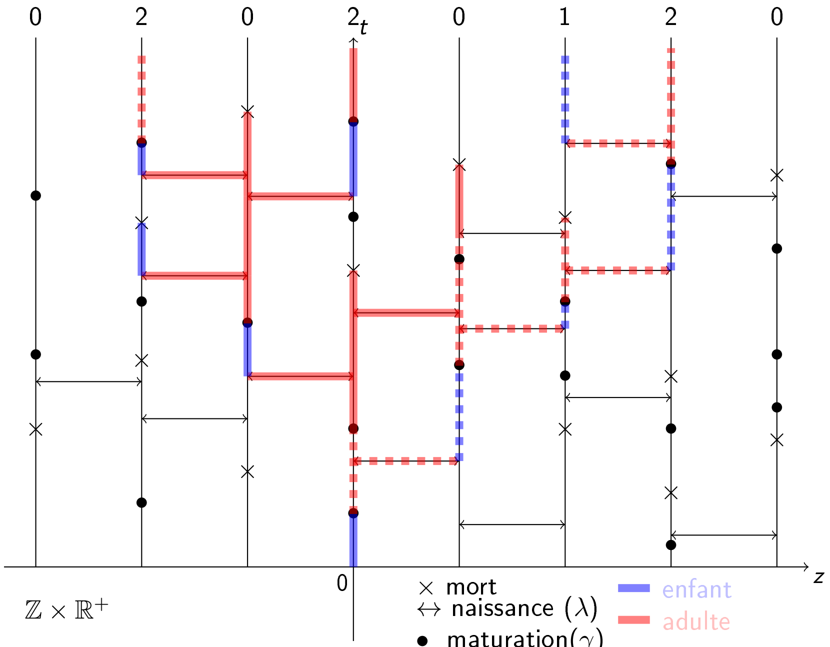
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
$\times$ mort
$\leftrightarrow$ naissance (λ)
$\bullet$ maturation(γ)
enfant
adulte



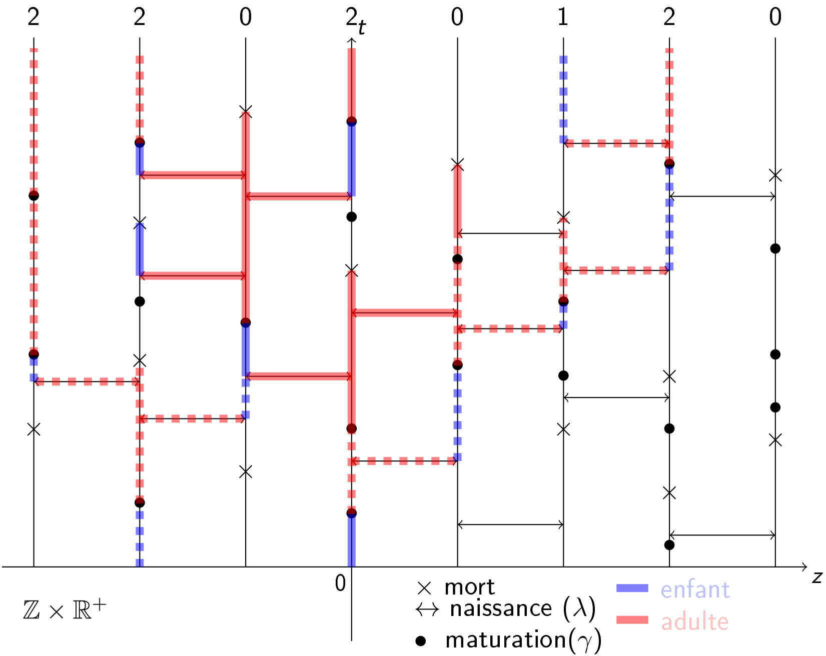
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte

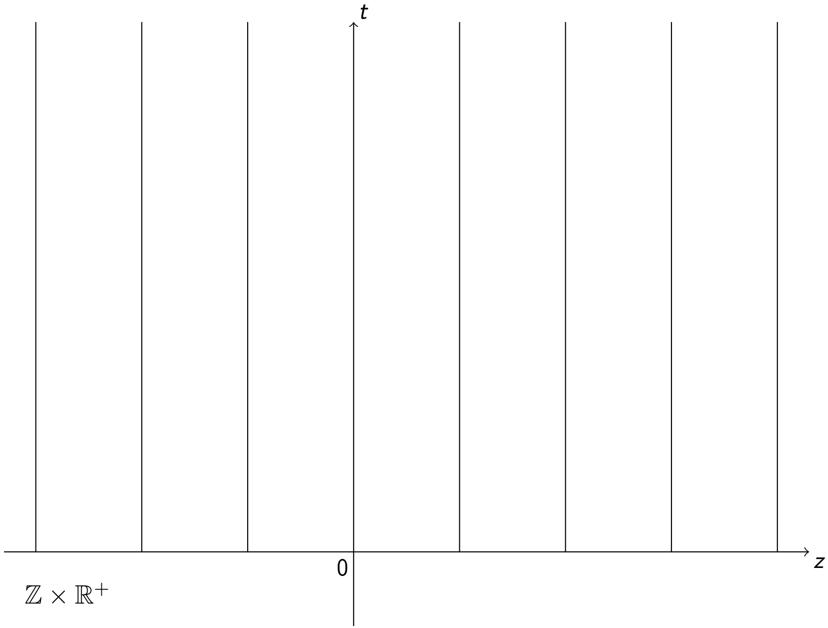


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte

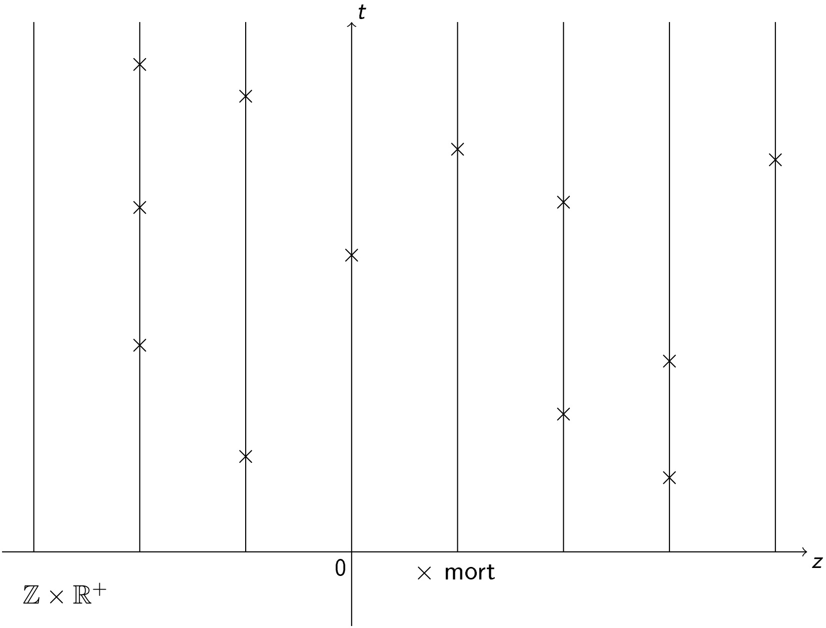


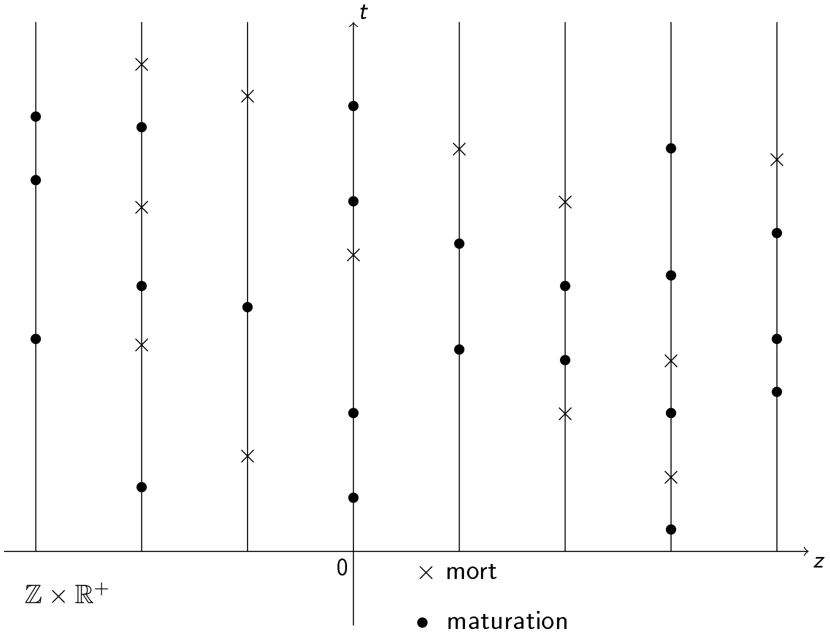
0
2
0
2
t
0
1
2
0
z
0
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte
ℤ × ℝ⁺


2 2 0 2 0 1 2 0
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance (λ)
• maturation(γ)
enfant
adulte

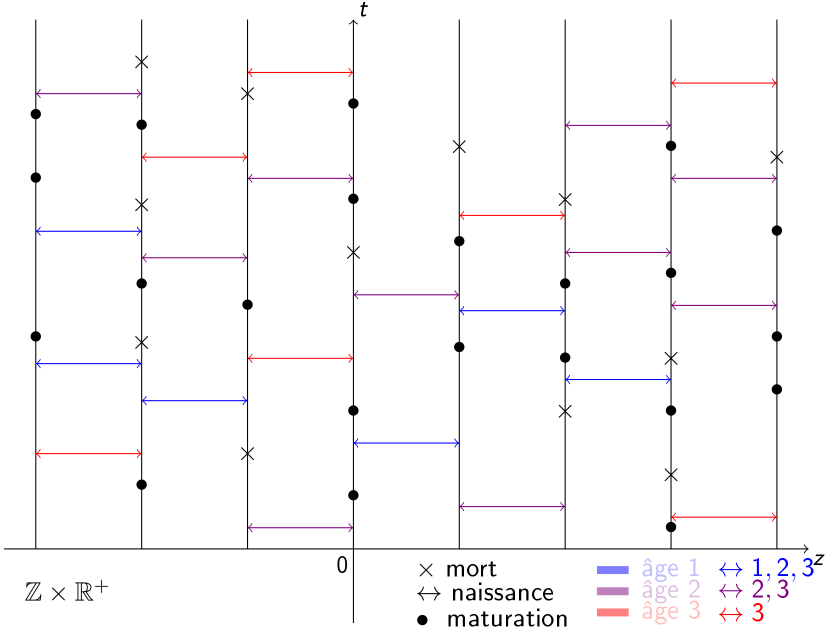


t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$

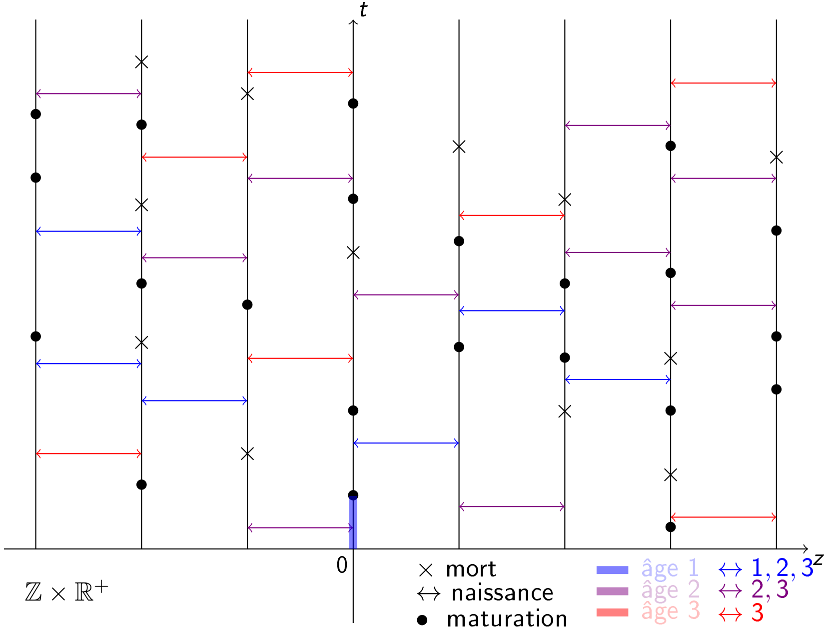

t
z
0
$\times$ mort
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



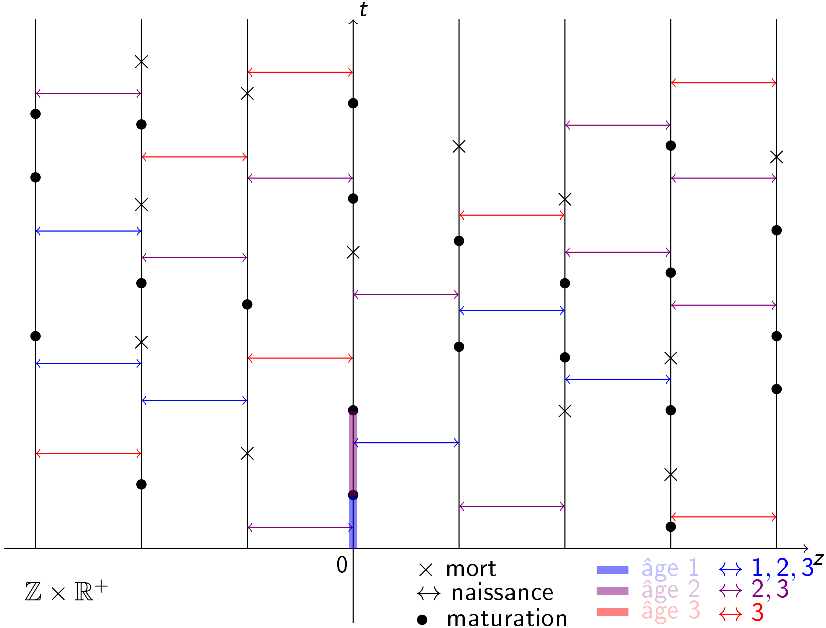
t
z
0
$\times$ mort
$\bullet$ maturation
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$



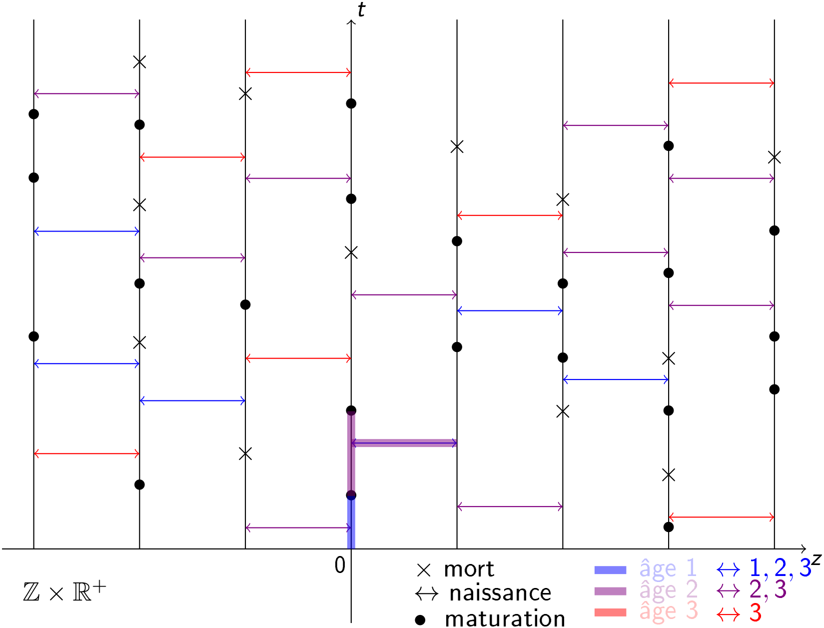
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3



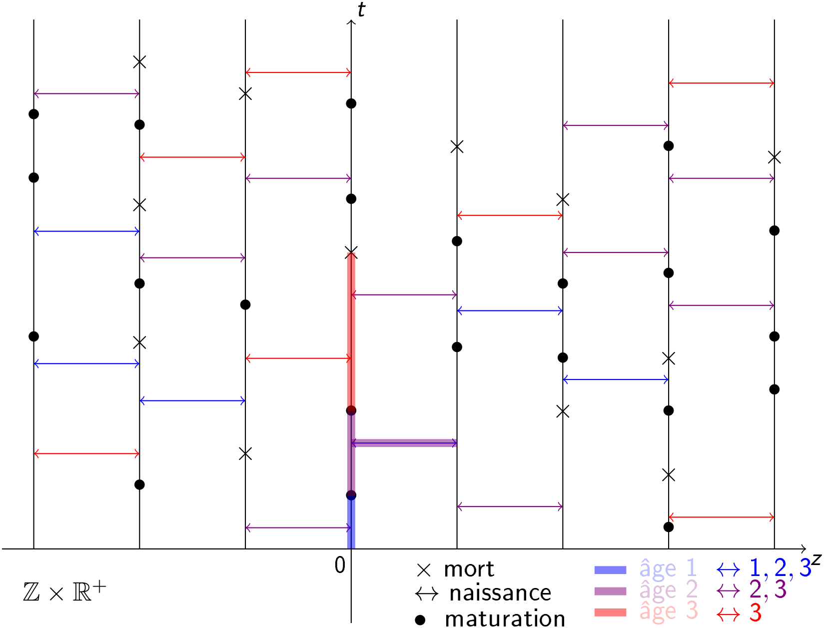
t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
● maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3



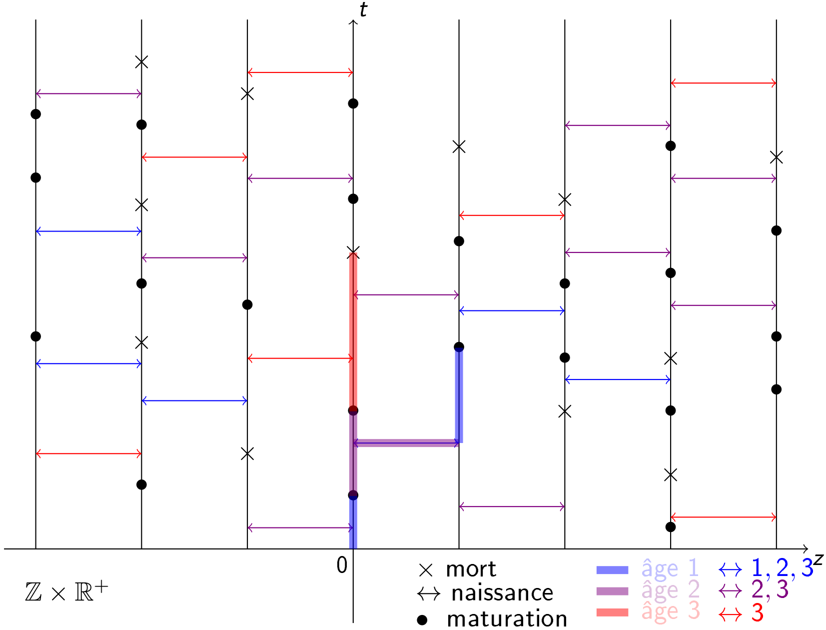
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3



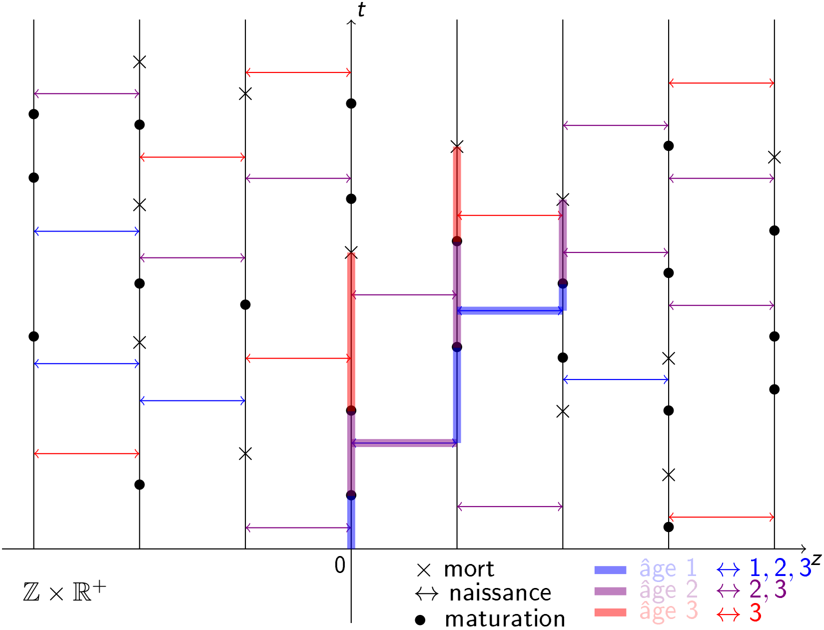
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
● maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3



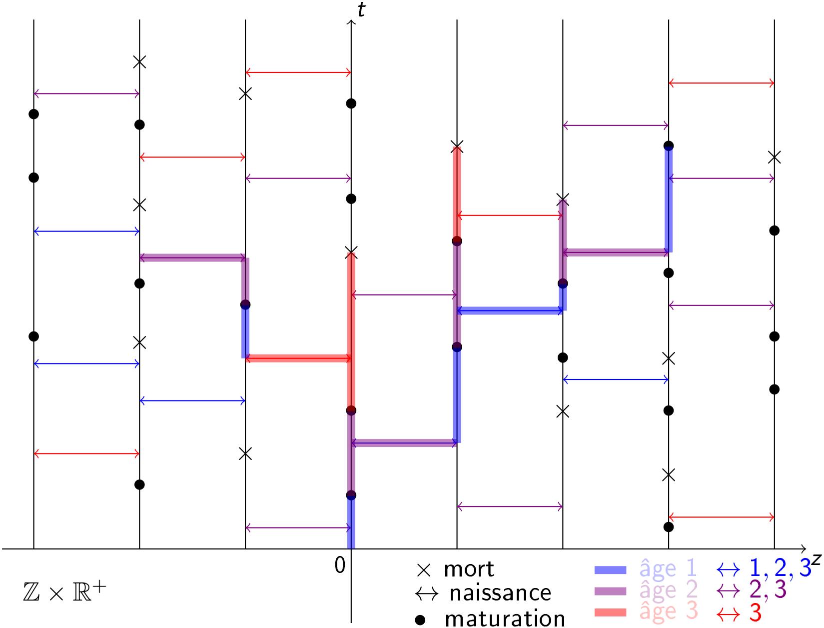
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3



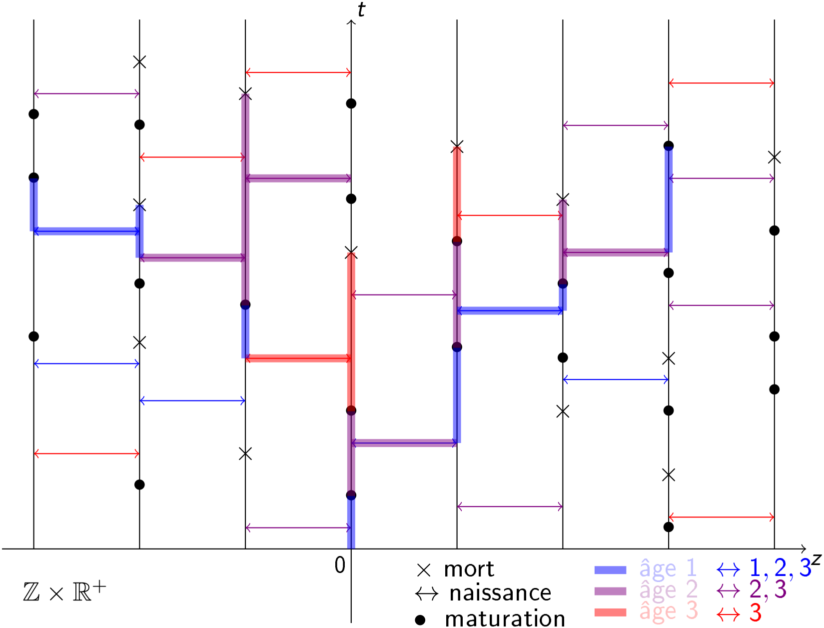
t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3



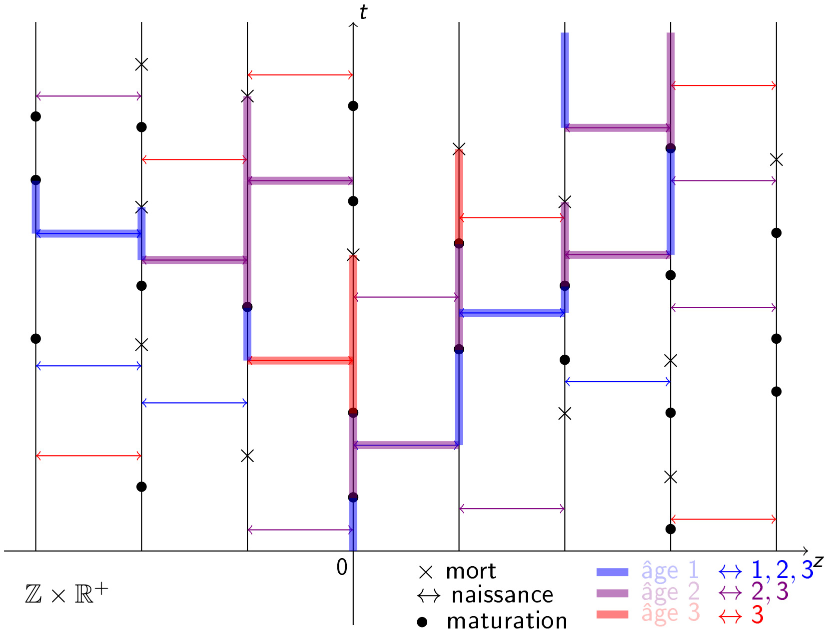
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1 ↔ 1, 2, 3
âge 2 ↔ 2, 3
âge 3 ↔ 3



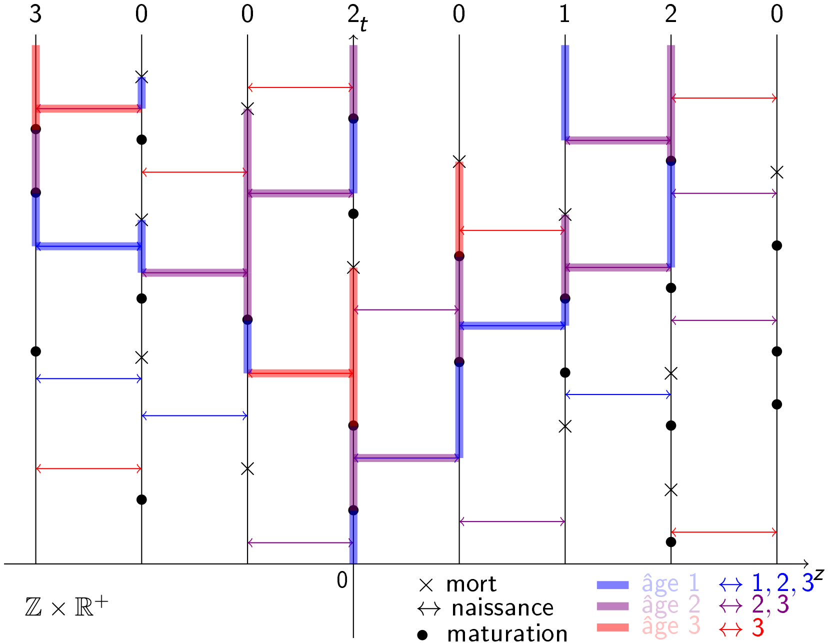
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1 ↔ 1, 2, 3
âge 2 ↔ 2, 3
âge 3 ↔ 3



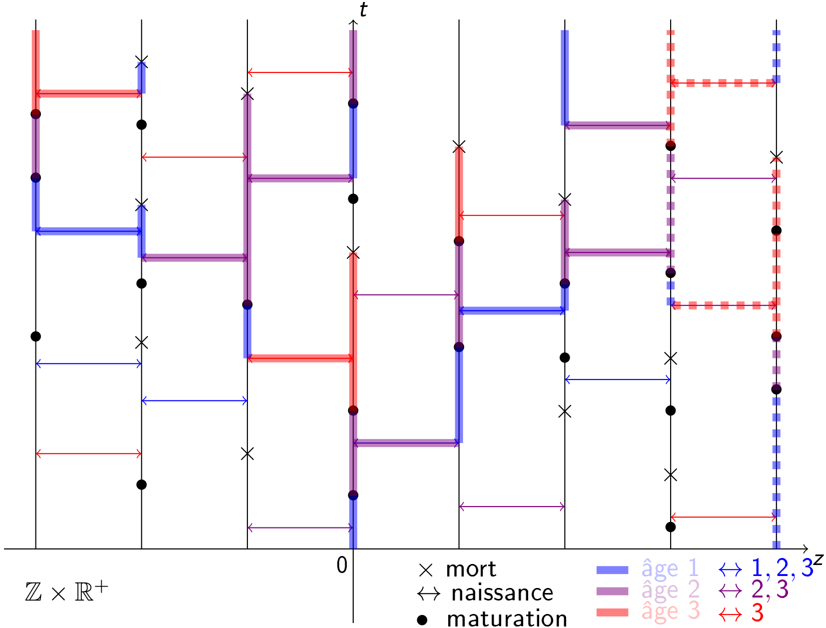
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3

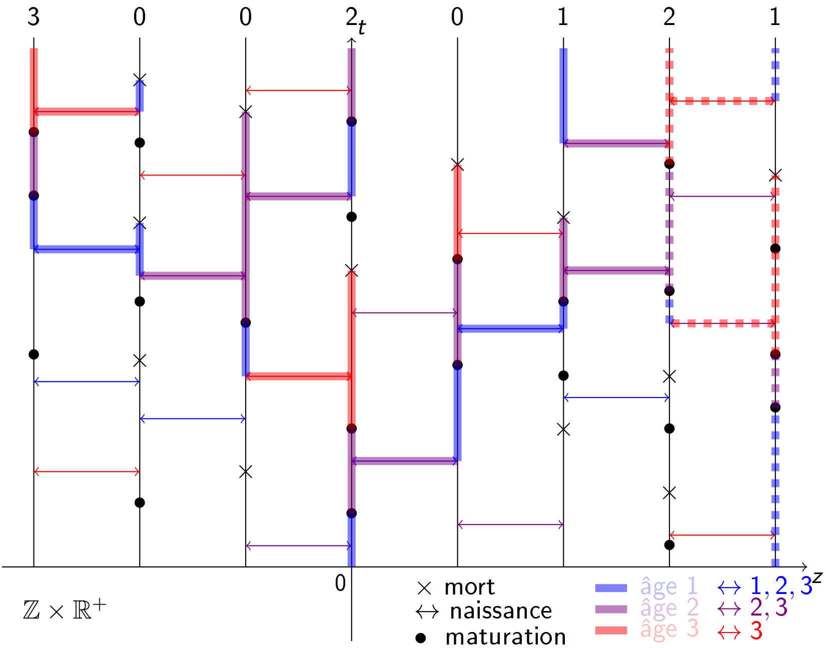


t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1
âge 2
âge 3
↔ 1, 2, 3
↔ 2, 3
↔ 3



3
0
0
2
t
0
1
2
0
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
● maturation
âge 1 ↔ 1, 2, 3
âge 2 ↔ 2, 3
âge 3 ↔ 3


t
0
z
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1 ↔ 1, 2, 3
âge 2 ↔ 2, 3
âge 3 ↔ 3



3 0 0 2 0 1 2 1
t
z
0
$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$
× mort
↔ naissance
• maturation
âge 1 ↔ 1, 2, 3
âge 2 ↔ 2, 3
âge 3 ↔ 3

Pour $t \geq 0$ on note :

$$A_t^f = \text{supp } \xi_t^f = \{x \in \mathbb{Z}^d ; \xi_t^f(x) \neq 0\},$$
$$= \text{l'ensemble des points vivants au temps } t.$$

Premières propriétés

Soient $f, g : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ et $t > 0$.

- Le PCV est **attractif** i.e $f \leq g \implies \xi_t^f \leq \xi_t^g$ et $A_t^f \leq A_t^g$;
- Le PCV est **additif** i.e $\xi_t^{f \vee g} = \xi_t^f \vee \xi_t^g$;
- Le PCV est **monotone** par rapport à ses paramètres :
  - croissant par rapport aux paramètres de naissance et maturation.

But : Montrer un **théorème de forme asymptotique** pour $\bigcup_{s \leq t} A_t$.

Survie du processus de contact

Définition

On dit qu'il y a **survie** si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) > 0$.
extinction si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) = 0$.

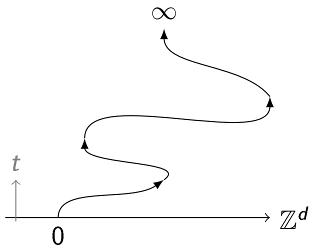
Valeur critique pour le PC : $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$

Survie du processus de contact

Définition

On dit qu'il y a **survie** si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) > 0.$
extinction si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) = 0.$

Valeur critique pour le PC : $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$

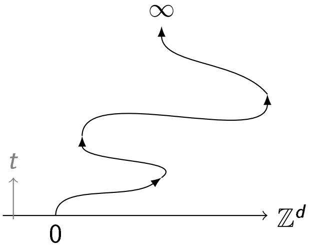


Survie du processus de contact

Définition

On dit qu'il y a **survie** si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) > 0$.
extinction si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) = 0$.

Valeur critique pour le PC : $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$



Transition de phase [Harris, 74]

Il existe une valeur critique $\lambda_c \in \,]0, +\infty[\,$ tel que :

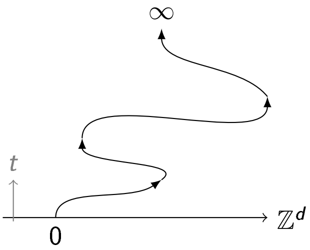
- si $\lambda < \lambda_c$, extinction,
- si $\lambda > \lambda_c$, survie.

Survie du processus de contact

Définition

On dit qu'il y a **survie** si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) > 0.$
extinction si $\mathbb{P}(\forall t,\ \xi_t^{\{0\}} \neq 0) = 0.$

Valeur critique pour le PC : $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$



Transition de phase [Harris, 74]

Il existe une valeur critique $\lambda_c \in \,]0, +\infty[$ tel que :

- si $\lambda < \lambda_c$, extinction,
- si $\lambda > \lambda_c$, survie.

Au point critique ? [Bezuidenhout et Grimmett, 91]

$$\lambda = \lambda_c, \text{ extinction.}$$

Krone définit une quantité similaire :

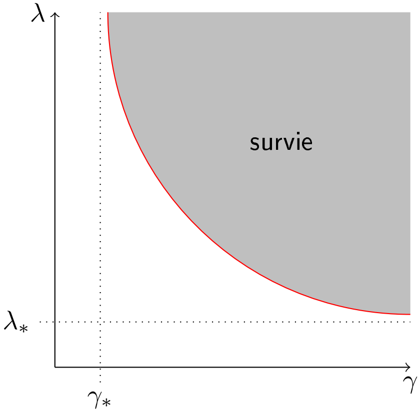
$$\lambda_c(\gamma) = \inf\left\{\lambda :\ \mathbb{P}_{\lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\{0(2)\}} \neq \emptyset\right) > 0\right\}.$$

0(2) : le site 0 dans l'état adulte.

Krone définit une quantité similaire :

$$\lambda_c(\gamma) = \inf\left\{\lambda : \mathbb{P}_{\lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\{0(2)\}} \neq \emptyset\right) > 0\right\}.$$

0(2) : le site 0 dans l'état adulte.



.

$\lambda_* = \lambda_c(PC)$. $\gamma_* > 0$ pour $d = 1$ par Krone (1999) et $d \geq 1$ par Foxall (2014).

un Théorème de Forme Asymptotique ?

- Un processus avec de "bonnes propriétés"

un Théorème de Forme Asymptotique ?

- Un processus avec de “bonnes propriétés” $\rightarrow$ PC, PC de Krone, mon PCV.

un Théorème de Forme Asymptotique ?

- Un processus avec de “bonnes propriétés” $\rightarrow$ PC, PC de Krone, mon PCV.
- Une “quantité d'interêt” H_t qui ne fait qu'augmenter

un Théorème de Forme Asymptotique ?

- Un processus avec de “bonnes propriétés” $\rightarrow$ PC, PC de Krone, mon PCV.
- Une “quantité d'interêt” H_t qui ne fait qu'augmenter $\rightarrow$ les points qui ont été vivants avant t

un Théorème de Forme Asymptotique ?

- Un processus avec de “bonnes propriétés” $\rightarrow$ PC, PC de Krone, mon PCV.
- Une “quantité d'interêt” H_t qui ne fait qu'augmenter $\rightarrow$ les points qui ont été vivants avant t
- Un contrôle de la croissance de cette quantité.

un Théorème de Forme Asymptotique ?

- Un processus avec de "bonnes propriétés" $\rightarrow$ PC, PC de Krone, mon PCV.
- Une "quantité d'interêt" H_t qui ne fait qu'augmenter $\rightarrow$ les points qui ont été vivants avant t
- Un contrôle de la croissance de cette quantité.

Théorème

Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, presque sûrement,

$$\forall t > 0, \ (1-\epsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t}{t} \subset (1+\epsilon)B_\mu,$$

avec B_μ la boule unité de μ.

un Théorème de Forme Asymptotique...

Soient λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right) > 0$.

On se place sous $\overline{\mathbb{P}}_{\lambda,\gamma}\left(\bullet\ |\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right)$.

un Théorème de Forme Asymptotique...

Soient λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right) > 0$.

On se place sous $\overline{\mathbb{P}}_{\lambda,\gamma}\left(\bullet\ |\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right)$.

Théorème de Forme Asymptotique pour le PCV

Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\overline{\mathbb{P}}$-presque sûrement,

$$\forall t > 0,\ (1-\epsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t^{\delta_0}}{t} \subset (1+\epsilon)B_\mu,$$

avec $\tilde{H}_t^{\delta_0} = \cup_{s \leq t} A_s^{\delta_0} + [0,1]^d$ et B_μ la boule unité de μ.

$\tilde{H}_t$ est (presque) l'ensemble des points nés avant t.

un Théorème de Forme Asymptotique...

Soient λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\lambda,\gamma}\Big(\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\Big) > 0$.

On se place sous $\overline{\mathbb{P}}_{\lambda,\gamma}\Big(\bullet\ |\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\Big)$.

Théorème de Forme Asymptotique pour le PCV

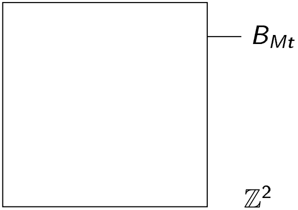
Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\overline{\mathbb{P}}$-presque sûrement,

$$\forall t > 0,\ (1-\epsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t^{\delta_0}}{t} \subset (1+\epsilon)B_\mu,$$

avec $\tilde{H}_t^{\delta_0} = \cup_{s \leq t} A_s^{\delta_0} + [0,1]^d$ et B_μ la boule unité de μ.

$\tilde{H}_t$ est (presque) l'ensemble des points nés avant t.

1. Croissance au plus linéaire



un Théorème de Forme Asymptotique...

Soient λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right) > 0$.

On se place sous $\overline{\mathbb{P}}_{\lambda,\gamma}\left(\bullet\ |\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right)$.

Théorème de Forme Asymptotique pour le PCV

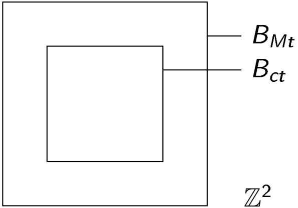
Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\overline{\mathbb{P}}$-presque sûrement,

$$\forall t > 0,\ (1-\epsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t^{\delta_0}}{t} \subset (1+\epsilon)B_\mu,$$

avec $\tilde{H}_t^{\delta_0} = \cup_{s \leq t} A_s^{\delta_0} + [0,1]^d$ et B_μ la boule unité de μ.

$\tilde{H}_t$ est (presque) l'ensemble des points nés avant t.

1. Croissance au plus linéaire
2. Croissance au moins linéaire



un Théorème de Forme Asymptotique...

Soient λ, γ tels que $\mathbb{P}_{\lambda,\gamma}\left(\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right) > 0$.

On se place sous $\overline{\mathbb{P}}_{\lambda,\gamma}\left(\bullet\ |\forall t > 0,\ \xi_t^{\delta_0} \neq 0\right)$.

Théorème de Forme Asymptotique pour le PCV

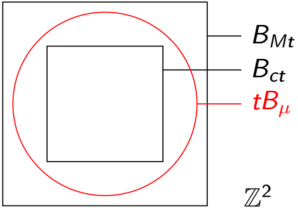
Il existe une norme μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\overline{\mathbb{P}}$-presque sûrement,

$$\forall t > 0,\ (1-\epsilon)B_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t^{\delta_0}}{t} \subset (1+\epsilon)B_\mu,$$

avec $\tilde{H}_t^{\delta_0} = \cup_{s \le t} A_s^{\delta_0} + [0,1]^d$ et B_μ la boule unité de μ.

$\tilde{H}_t$ est (presque) l'ensemble des points nés avant t.

1. Croissance au plus linéaire
2. Croissance au moins linéaire
3. Croissance exactement linéaire



Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

$t(x) = \inf\{t \geq 0 : \xi_t(x) \neq 0\}$ temps d'atteinte de x.

$H_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\}$.

Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

$t(x) = \inf\{t \geq 0 : \xi_t(x) \neq 0\}$ temps d'atteinte de x.

$H_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\}$.

- Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut montrer la convergence de $\frac{t(nx)}{n}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

$$t(x) = \inf\{t \geq 0 : \xi_t(x) \neq 0\} \text{ temps d'atteinte de } x.$$
$$H_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\}.$$

- Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut montrer la convergence de $\frac{t(nx)}{n}$ quand $n \to \infty$.
- Théorème ergodique sous additif (ou presque) de Kingman :

$$t((n+p)x) \leq t(nx) + t(px) \circ \text{translation spatio-temporelle.}$$

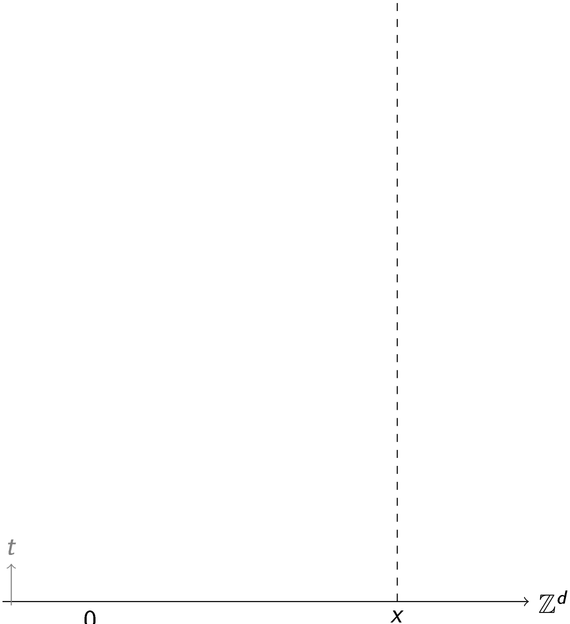
Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

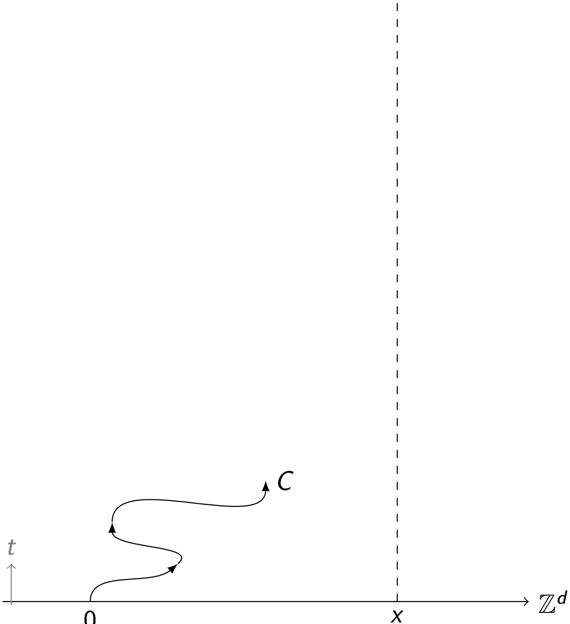
$$t(x) = \inf\{t \geq 0 : \xi_t(x) \neq 0\} \text{ temps d'atteinte de } x.$$
$$H_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\}.$$

- Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. On veut montrer la convergence de $\frac{t(nx)}{n}$ quand $n \rightarrow \infty$.
- Théorème ergodique sous additif (ou presque) de Kingman :

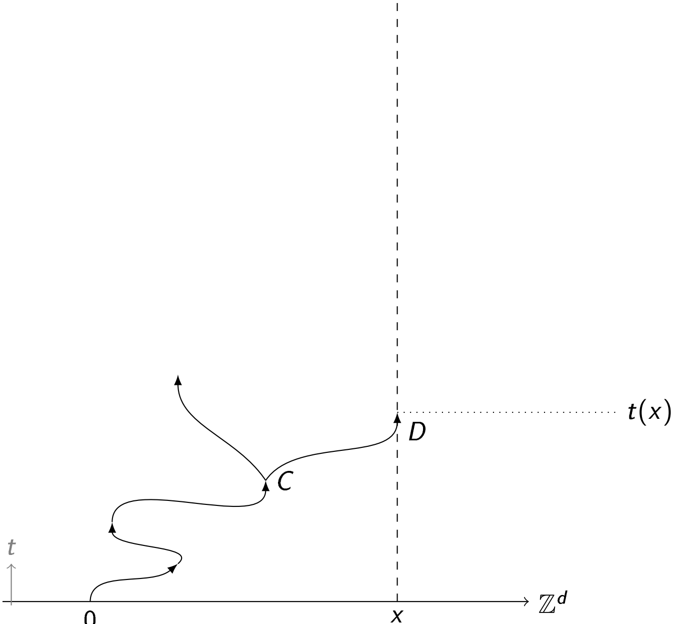
$$t((n+p)x) \leq t(nx) + t(px) \circ \text{translation spatio-temporelle.}$$

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI
stationnarité	OUI	NON
(presque) sous additivité	OUI	NON

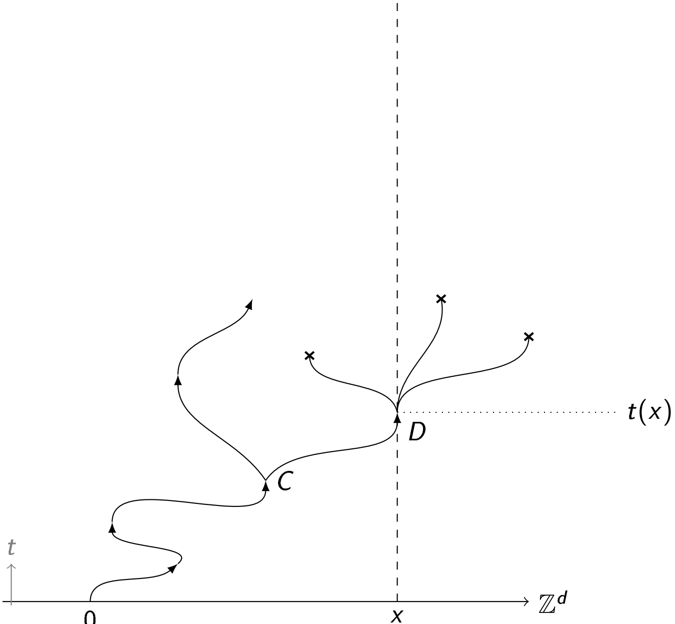

t
0
x
ℤ^d



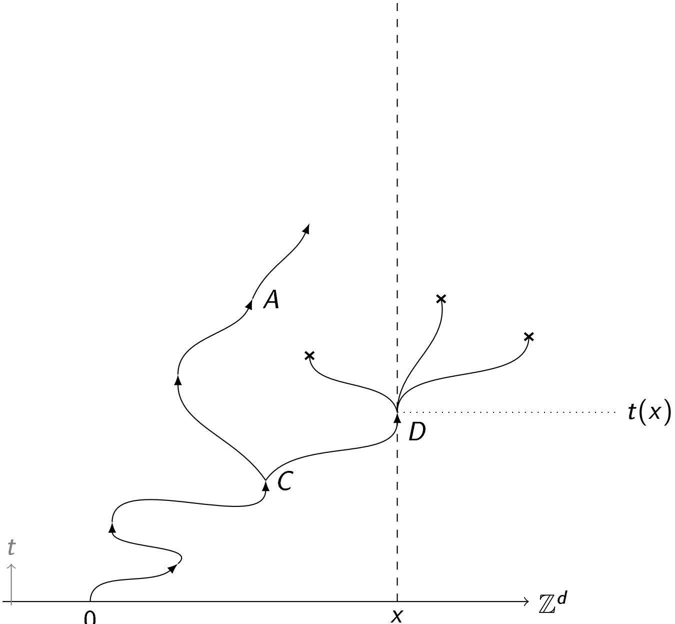
C
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$

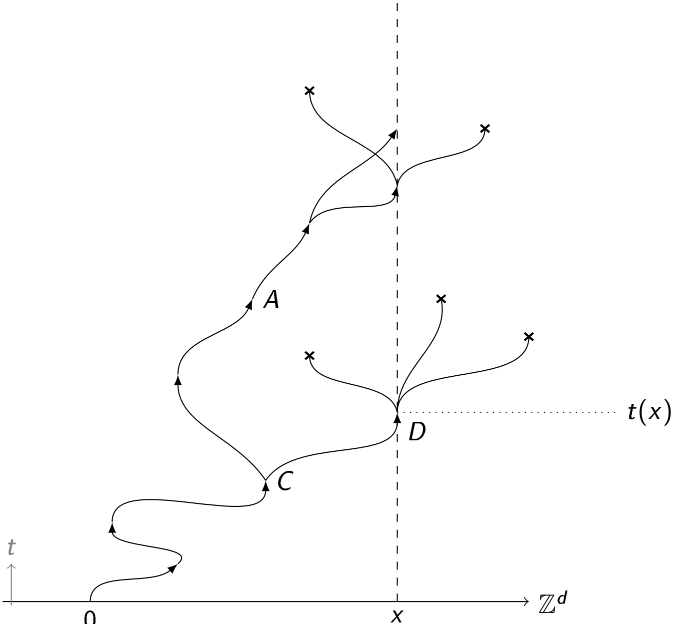


t
$t(x)$
D
C
0
x
$\mathbb{Z}^d$

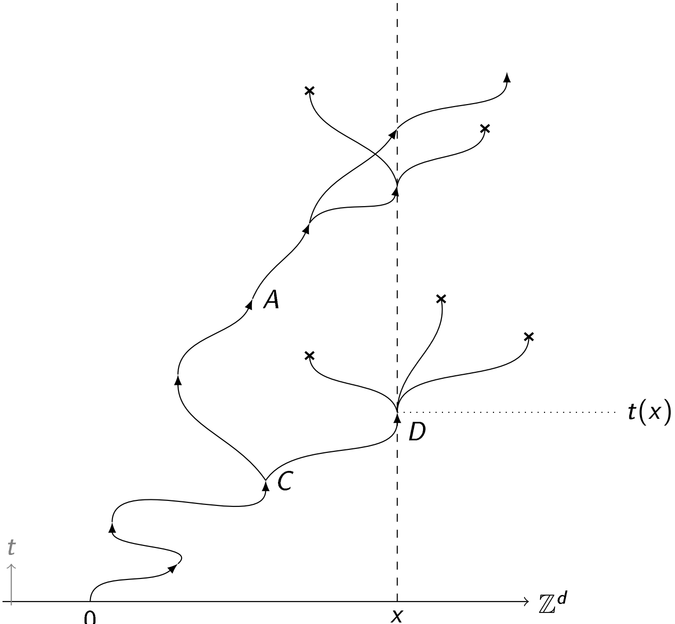


t
C
D
t(x)
0
x
$\mathbb{Z}^d$

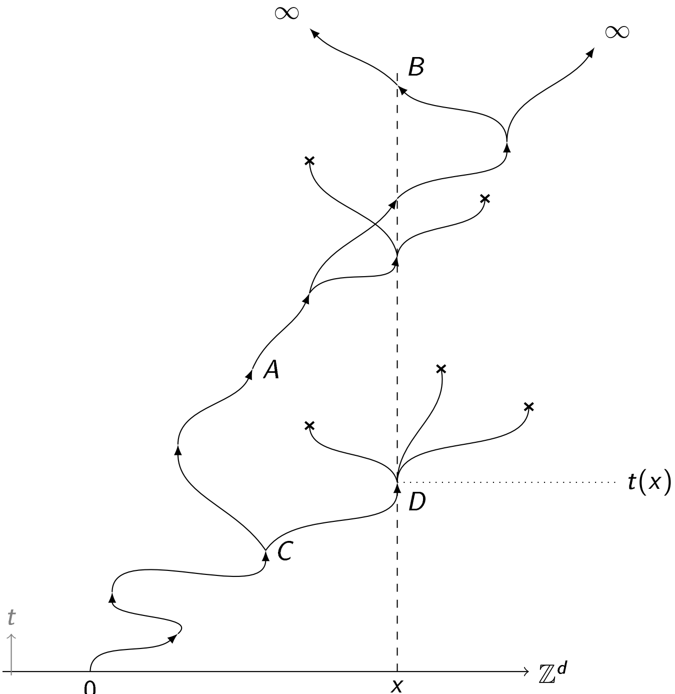

A
C
D
$t(x)$
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$



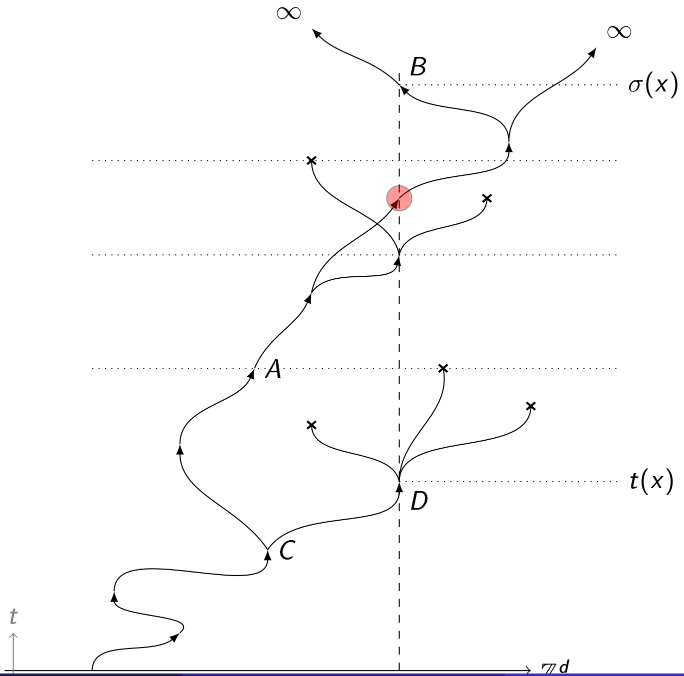
A
C
D
$t(x)$
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$



A
C
D
$t(x)$
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$



∞
∞
B
A
$t(x)$
D
C
t
0
x
$\mathbb{Z}^d$


∞
∞
B
σ(x)
A
t(x)
D
C
t
Z^d

Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

Croissance exactement linéaire $\to$ TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

- σ vérifie les mêmes croissances d'ordre linéaire que t.

Croissance exactement linéaire $\to$ TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

- σ vérifie les mêmes croissances d'ordre linéaire que t.
- TFA pour σ grâce au théorème presque sous additif de Kesten-Hammersley(74) :

$$\sigma((n+p)x) \leq \sigma(nx) + \sigma(px) \circ \text{translation spatio-temporelle} + \text{quantité contrôlée.}$$

Croissance exactement linéaire $\to$ TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

- σ vérifie les mêmes croissances d'ordre linéaire que t.
- TFA pour σ grâce au théorème presque sous additif de Kesten-Hammersley(74) :

$$\sigma((n+p)x) \leq \sigma(nx) + \sigma(px) \circ \text{translation spatio-temporelle} + \text{quantité contrôlée.}$$

- « Uniforme Continuité » de σ.

Croissance exactement linéaire $\rightarrow$ TFA

	$t(x)$	$t(x)$ sous $\overline{\mathbb{P}}$	σ sous $\overline{\mathbb{P}}$
intégrabilité	NON	OUI	OUI
stationnarité	OUI	NON	OUI
presque sous additivité	OUI	NON	OUI

- σ vérifie les mêmes croissances d'ordre linéaire que t.
- TFA pour σ grâce au théorème presque sous additif de Kesten-Hammersley(74) :

$$\sigma((n+p)x) \leq \sigma(nx) + \sigma(px) \circ \text{translation spatio-temporelle} + \text{quantité contrôlée.}$$

- « Uniforme Continuité » de σ.
- Contrôle de la différence entre t et σ $\rightarrow$ TFA pour t.

Merci pour votre attention