

Probabilités multivariées de Jonglage

arxiv:1402.3752

François Nunzi

joint work with Arvind Ayyer, Jérémie Bouttier and Sylvie Corteel

Paris 7 ; LIAFA

19 mai 2014

Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$,
nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$,
nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$,
nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



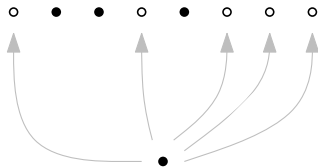
Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$,
nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



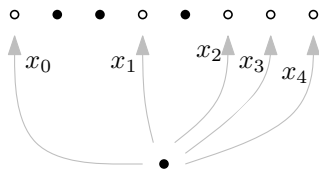
Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$,
nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



Présentation du modèle

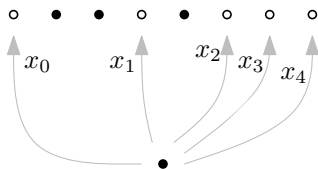
Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



avec $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:

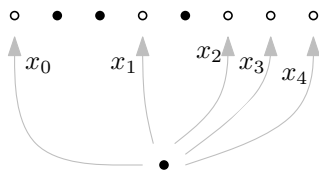


avec $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

On note $St_{h,k}$ l'ensemble des états de jonglage de hauteur h présentant k espaces libres.

Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



avec $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

On note $St_{h,k}$ l'ensemble des états de jonglage de hauteur h présentant k espaces libres.

Si on fixe $x_i = \frac{1}{k+1}$ pour tout i , on retrouve le modèle étudié par G.S. Warrington dans son article Juggling Probabilities.

Exemple

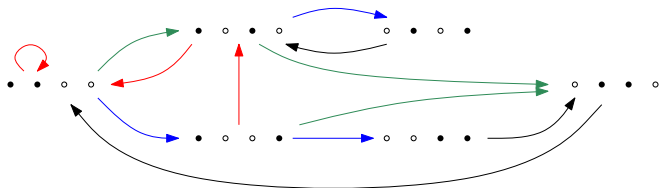


Figure: $St_{4,2}$ (notation abusive). Les flèches noires représentent les transitions de probabilité 1, les rouges x_0 , vertes x_1 , bleues x_2 .

Exemple

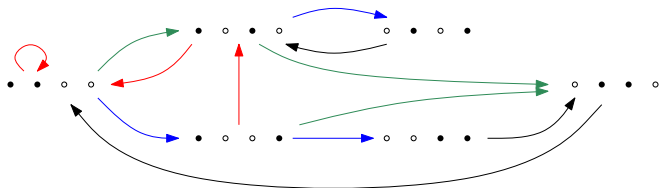


Figure: $St_{4,2}$ (notation abusive). Les flèches noires représentent les transitions de probabilité 1, les rouges x_0 , vertes x_1 , bleues x_2 .

La matrice de transition de cette chaîne de Markov dans la base $(\bullet\bullet\circ\circ, \bullet\circ\bullet\circ, \bullet\circ\circ\bullet, \circ\bullet\bullet\circ, \circ\bullet\circ\bullet, \circ\circ\bullet\bullet)$:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

La matrice de transition de cette chaîne de Markov dans la base $(\bullet\bullet\circ\circ, \bullet\circ\bullet\circ, \bullet\circ\circ\bullet, \circ\bullet\bullet\circ, \circ\bullet\circ\bullet, \circ\circ\bullet\bullet)$:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un vecteur propre (à gauche) de cette matrice est :

$$(1, x_1 + x_2, x_2, (x_1 + x_2)^2, x_2(x_1 + x_2), x_2^2)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{cccccc} \bullet \bullet \circ \circ & \bullet \circ \bullet \circ & \bullet \circ \circ \bullet & \circ \bullet \bullet \circ & \circ \bullet \circ \bullet & \circ \circ \bullet \bullet \\ 1 & x_1 + x_2 & x_2 & (x_1 + x_2)^2 & x_2(x_1 + x_2) & x_2^2 \end{array} \right)$$

Le théorème

On suppose dans la suite que $x_0 > 0$ (unicité de la classe communicante et apériodicité).

Soit $B \in St_{h,k}$, on l'écrit comme un mot $B = b_1 \dots b_h$ sur l'alphabet $\{\circ, \bullet\}$.

Théorème

La distribution stationnaire π de $St_{h,k}$ est donnée par :

$$\pi(B) = \frac{1}{Z_{h,k}} \prod_{\substack{i \in \{1, \dots, h\} \\ b_i = \bullet}} (x_{E_i(B)} + \dots + x_k)$$

où $E_i(B) = \#\{j < i, b_j = \circ\}$

Le théorème

Théorème

La distribution stationnaire π de $St_{h,k}$ est donnée par :

$$\pi(B) = \frac{1}{Z_{h,k}} \prod_{\substack{i \in \{1, \dots, h\} \\ b_i = \bullet}} (x_{E_i(B)} + \dots + x_k)$$

où $E_i(B) = \#\{j < i, b_j = \circ\}$

Remarques :

- Cette formule s'exprime plus simplement en termes de partitions d'entiers

Le théorème

Théorème

La distribution stationnaire π de $St_{h,k}$ est donnée par :

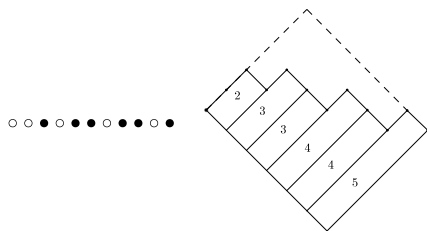
$$\pi(B) = \frac{1}{Z_{h,k}} \prod_{\substack{i \in \{1, \dots, h\} \\ b_i = \bullet}} (x_{E_i(B)} + \dots + x_k)$$

où $E_i(B) = \#\{j < i, b_j = \circ\}$

Remarques :

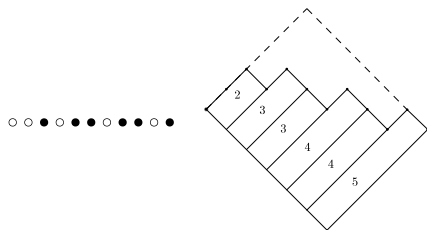
- Cette formule s'exprime plus simplement en termes de partitions d'entiers
- On aimerait savoir interpréter chacun des monômes qui apparaissent dans cette formule

Partitions d'entiers



Bijection naturelle entre $St_{h,k}$ et $Par_{k,(h-k)}$ les partitions d'entiers dont le diagramme de Young rentre dans un rectangle de taille $k * (h - k)$

Partitions d'entiers



On pose, pour tout $0 \leq i \leq k$, $y_i = \sum_{j=i}^k x_j$.

Théorème

La distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite par $St_{h,k}$ sur $Par_{k,\ell}$ est donné par :

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{Z_{h,k}} \prod_{i=1}^{\ell} y_{\lambda_i}$$

Remarques :

- $Z_{h,k}$ s'exprime de manière simple comme un polynôme symétrique en les y_i .

Remarques :

- $Z_{h,k}$ s'exprime de manière simple comme un polynôme symétrique en les y_i .
- Le Théorème s'étend naturellement au cas où les partitions ne sont pas confinées dans un rectangle. Cela correspond à jongler sans limite de hauteur et/ou à faire tendre le nombre de balles vers l'infini.

Remarques :

- $Z_{h,k}$ s'exprime de manière simple comme un polynôme symétrique en les y_i .
- Le Théorème s'étend naturellement au cas où les partitions ne sont pas confinées dans un rectangle. Cela correspond à jongler sans limite de hauteur et/ou à faire tendre le nombre de balles vers l'infini.
- Dans le cas d'un nombre infini d'espaces libres, la mesure stationnaire est finie si et seulement si $\sum_{i \geq 0} ix_i = \sum_{i \geq 0} y_i < \infty$.

Remarques :

- $Z_{h,k}$ s'exprime de manière simple comme un polynôme symétrique en les y_i .
- Le Théorème s'étend naturellement au cas où les partitions ne sont pas confinées dans un rectangle. Cela correspond à jongler sans limite de hauteur et/ou à faire tendre le nombre de balles vers l'infini.
- Dans le cas d'un nombre infini d'espaces libres, la mesure stationnaire est finie si et seulement si $\sum_{i \geq 0} i x_i = \sum_{i \geq 0} y_i < \infty$.
- Si on fixe $x_i = (1 - q)q^i$, une partition de taille n sera de poids $q^n / F(q)$ avec F est la série génératrice des partitions d'entiers.

Entrelacement

On pose $H = h + 1$ et $K = k + 1$ On note $\mathcal{S}_{H,K}$ l'ensemble des partitions de H éléments en K parties et (abus) la chaîne de Markov décrite dessus.

Entrelacement

On pose $H = h + 1$ et $K = k + 1$ On note $\mathcal{S}_{H,K}$ l'ensemble des partitions de H éléments en K parties et (abus) la chaîne de Markov décrite dessus.

Théorème

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{H,K}$ Une mesure stationnaire non normalisée de la chaîne de Markov enrichie est donnée par :

$$\tilde{w}(\sigma) = \prod_{(s,t) \text{ arche de } \sigma} x_{K - C_{\sigma}(s,t)}.$$

Entrelacement

On pose $H = h + 1$ et $K = k + 1$ On note $\mathcal{S}_{H,K}$ l'ensemble des partitions de H éléments en K parties et (abus) la chaîne de Markov décrite dessus.

Théorème

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{H,K}$ Une mesure stationnaire non normalisée de la chaîne de Markov enrichie est donnée par :

$$\tilde{w}(\sigma) = \prod_{(s,t) \text{ arche de } \sigma} x_{K-C_\sigma(s,t)}.$$

Remarque

- Les termes ainsi obtenus sont bien des monômes en les x_i .

Entrelacement

On pose $H = h + 1$ et $K = k + 1$ On note $\mathcal{S}_{H,K}$ l'ensemble des partitions de H éléments en K parties et (abus) la chaîne de Markov décrite dessus.

Théorème

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{H,K}$ Une mesure stationnaire non normalisée de la chaîne de Markov enrichie est donnée par :

$$\tilde{w}(\sigma) = \prod_{(s,t) \text{ arche de } \sigma} x_{K-C_\sigma(s,t)}.$$

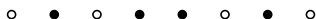
Remarque

- Les termes ainsi obtenus sont bien des monômes en les x_i .
- Prochaîne étape : que se passe-t-il si on ne fixe plus le nombre de parties ?

Jonglage avec un nombre variable de balles

Nombre de balles variable compris entre 0 et $h = 8$.

On se donne $(z_i)_{1 \leq i \leq h}$ et a des réels positifs avec $a + \sum_{i=1}^h z_i = 1$.



Jonglage avec un nombre variable de balles

Nombre de balles variable compris entre 0 et $h = 8$.

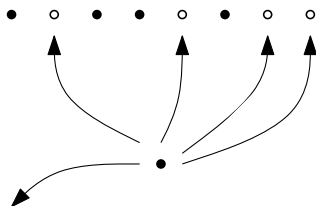
On se donne $(z_i)_{1 \leq i \leq h}$ et a des réels positifs avec $a + \sum_{i=1}^h z_i = 1$.



Jonglage avec un nombre variable de balles

Nombre de balles variable compris entre 0 et $h = 8$.

On se donne $(z_i)_{1 \leq i \leq h}$ et a des réels positifs avec $a + \sum_{i=1}^h z_i = 1$.



Jonglage avec un nombre variable de balles

Nombre de balles variable compris entre 0 et $h = 8$.

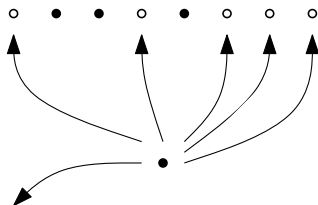
On se donne $(z_i)_{1 \leq i \leq h}$ et a des réels positifs avec $a + \sum_{i=1}^h z_i = 1$.



Jonglage avec un nombre variable de balles

Nombre de balles variable compris entre 0 et $h = 8$.

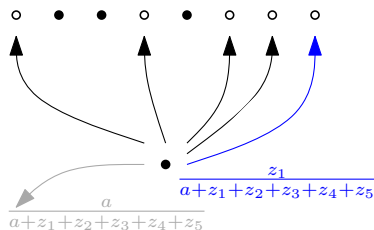
On se donne $(z_i)_{1 \leq i \leq h}$ et a des réels positifs avec $a + \sum_{i=1}^h z_i = 1$.



Jonglage avec un nombre variable de balles

Nombre de balles variable compris entre 0 et $h = 8$.

On se donne $(z_i)_{1 \leq i \leq h}$ et a des réels positifs avec $a + \sum_{i=1}^h z_i = 1$.

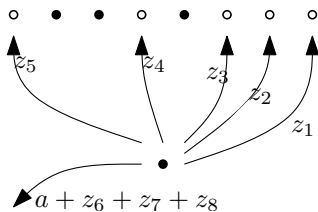


Le modèle d'*add-drop*.

Jonglage avec un nombre variable de balles

Nombre de balles variable compris entre 0 et $h = 8$.

On se donne $(z_i)_{1 \leq i \leq h}$ et a des réels positifs avec $a + \sum_{i=1}^h z_i = 1$.



Le modèle d'*annihilation*.

Jonglage avec un nombre variable de balles

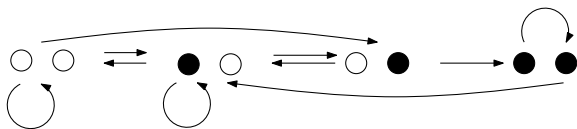


Figure: Le graphe de transition pour $h = 2$.

Jonglage avec un nombre variable de balles

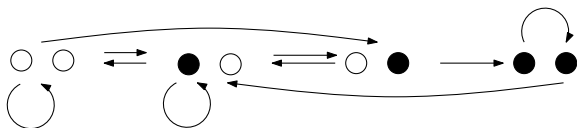


Figure: Le graphe de transition pour $h = 2$.

Avec le modèle d'annihilation, on observe un phénomène de *convergence ultrarapide* : l'état stationnaire est atteint en un nombre fini d'étapes.

Jonglage avec un nombre variable de balles

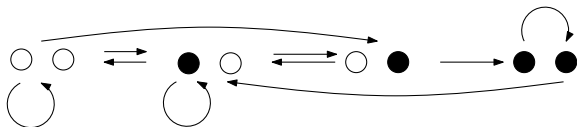


Figure: Le graphe de transition pour $h = 2$.

Avec le modèle d'annihilation, on observe un phénomène de *convergence ultrarapide* : l'état stationnaire est atteint en un nombre fini d'étapes.

Le modèle enrichi ne fait pas apparaître les monômes que l'on aimerait avoir. On va, dans la suite, enrichir davantage la chaîne.

Théorème

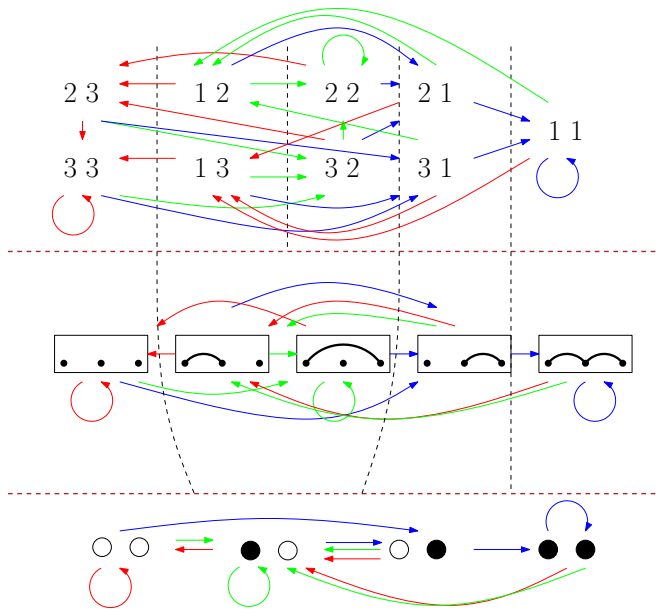
La mesure stationnaire du modèle d'annihilation est donnée par

$$\Pi(B) = \prod_{\substack{i=1 \\ b_i=\bullet}}^h (z_1 + \cdots + z_{\psi_i(B)+1}) \prod_{j=1}^k (z_{j+1} + \cdots + z_h + a), \quad (1)$$

pour $B = b_1 \dots b_h \in St_{h,k}$, avec $\psi_i(B) = \#\{j : i < j \leq h, b_j = \circ\}$.
De même, la distribution stationnaire de la chaîne enrichie est donnée par

$$\tilde{\Pi}(\sigma) = \prod_{(s,t) \text{ arch of } \sigma} z_{C_\sigma(s,t)} \prod_{i=1}^{K-1} (z_{i+1} + \cdots + z_{H-1} + a), \quad (2)$$

avec $\sigma \in S(H)$ et K son nombre de blocs. Il n'y a pas de facteur de normalisation, car Π et $\tilde{\Pi}$ sont déjà de norme 1 pour $z_1 + \cdots + z_h + a = 1$.



MERCI