Convergence de schéma volumes finis pour un problème parabolique dégénéré avec une condition zéro flux au bord

GAZIBO KARIMOU Mohamed

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Lyon, le 19 mai 2014

Plan de la presentation

1. Introduction
2. Définition de solution entropique
3. Description du schéma VF
4. Convergence vers une solution entropique
5. Discussions autour de l'hypothèse de "confinement"

Plan de la presentation

1 Introduction

2 Définition de solution entropique

3 Description du schéma VF

4 Convergence vers une solution entropique

5 Discussions autour de l'hypothèse de "confinement"

On se place dans un domaine Ω borné Lipschizienne de $\mathbb{R}^\ell$ et on considère le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} u_t + \operatorname{div} f(u) - \Delta\phi(u) & = 0 \quad \text{dans} \quad Q = (0,T)\times\Omega, \\ u(0,x) & = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta & = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases}$$

- On suppose que u_0 est borné dans $[0, u_{\max}]$ avec $u_{\max} > 0$ et f une fonction continue qui vérifie l'hypothèse de "confinement" suivante :

$$f(0) = f(u_{\max}) = 0. \tag{H1}$$

- La fonction $\phi(.)$ est une fonction continue qui est constante pour $u \leq u_c$, avec ($0 < u_c < u_{\max}$) sinon $\phi(.)$ est strictement croissante.

- Non existence de solution classique.
- Non unicité de solution faible .
- Notion appropriée = solution entropique (voir Kruzhkov, Carrillo).

- S.N. Kruzkhov, *First order quasi-linear equations in several independent variables.* Math. USSR Sb. **10** (2) (1970) 217-243.
- J. Carrillo, *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems.* Arch. Ration. Mech. Anal. **147** (4) (1999) 269-361.
- R. Bürger, H. Frid, K. H. Karlsen, *On the well-posedness of entropy solution to conservation laws with a zero-flux boundary condition.* J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), 108-120.

- Non existence de solution classique.
- Non unicité de solution faible .
- Notion appropriée = solution entropique (voir Kruzhkov, Carrillo).

- S.N. Kruzkhov, *First order quasi-linear equations in several independent variables.* Math. USSR Sb. **10** (2) (1970) 217-243.
- J. Carrillo, *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems.* Arch. Ration. Mech. Anal. **147** (4) (1999) 269-361.
- R. Bürger, H. Frid, K. H. Karlsen, *On the well-posedness of entropy solution to conservation laws with a zero-flux boundary condition.* J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), 108-120.

- Non existence de solution classique.
- Non unicité de solution faible .
- Notion appropriée = solution entropique (voir Kruzhkov, Carrillo).

- S.N. Kruzkhov, *First order quasi-linear equations in several independent variables.* Math. USSR Sb. **10** (2) (1970) 217-243.
- J. Carrillo, *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems.* Arch. Ration. Mech. Anal. **147** (4) (1999) 269-361.
- R. Bürger, H. Frid, K. H. Karlsen, *On the well-posedness of entropy solution to conservation laws with a zero-flux boundary condition.* J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), 108-120.

Plan de la presentation

1 Introduction

2 Définition de solution entropique

3 Description du schéma VF

4 Convergence vers une solution entropique

5 Discussions autour de l'hypothèse de "confinement"

Définition

(Gazibo-Andreianov, 2012) *Une fonction mesurable u à valeurs dans $[0, u_{\max}]$ est appelée solution entropique du problème (P) si pour tout $k \in [0, u_{\max}]$ l'inégalité suivante est satisfaite au sens des distributions dans $\mathcal{D}'([0,T) \times \mathbb{R}^\ell)$:*

$$|u-k|_t + \nabla\Big(sign(u-k)(f(u) - f(k) - \nabla\phi(u))\Big) \leq |f(k).\eta|\, d\mathcal{H}^\ell_\Sigma$$

Remarque

1. *La solution entropique est bien solution faible de (P) sous* (H1) *.*
2. *Soulignons qu'en particulier, la condition aux limites de flux nul $(f(u) - \nabla\phi(u)).\eta = 0$ est vérifiée littéralement au sens faible. Cela contraste avec les propriétés du problème de Dirichlet. Nous nous attendons à ce que cette condition de Neumann homogène soit "relaxée" si hypothèse* (H1) *est abandonnée.*

Plan de la presentation

1 Introduction

2 Définition de solution entropique

3 Description du schéma VF

4 Convergence vers une solution entropique

5 Discussions autour de l'hypothèse de "confinement"

La notion de maillage orthogonal admissible

Définition (Eymard, Gallouet, Herbin)

- Ω un ouvert borné polygonal connexe de $\mathbb{R}^\ell$.
- Un maillage orthogonal admissible $\mathcal{O}$ est constitué de :
  - une famille finie de sous-domaines compacts, polyhedraux convexes, non vides de Ω notés K et appelés volumes de contrôle vérifiant :
    - Si $K \neq L$, on a $\overline{K} \cap \overline{L} = \emptyset$
    - $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{O}} K$.
  - une famille de points $(x_K)_{K \in \mathcal{O}}$ tels que
    - Pour tout $K \in \mathcal{O}$, $x_K \in \overline{K}$.
    - Pour tout $K; L \in \mathcal{O}$, $K \neq L$, si $K \cap L$ est de dimension $\ell - 1$, alors c'est une face de K et de L, notée $K|L$ et qui de plus, vérifie la condition d'orthogonalité : $[x_K; x_L] \perp K|L$

On se donne un maillage admissible

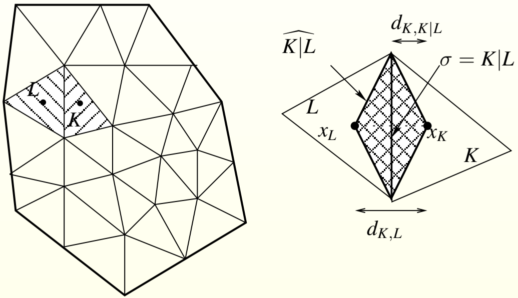

FIGURE : volumes de controle , centre, diamants

Les inconnues discrètes u_K^{n+1} pour tout volume de contrôle $K \in \mathcal{O}$, et $n \in \mathbb{N}$ sont définies par les relations suivantes : Initialisation

$$u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x)dx \quad \forall K \in \mathcal{O}, \tag{1}$$

ensuite, nous utilisons un schéma Euler implicite en temps pour discrétiser le problème (P) :
$\forall n > 0, \ \forall K \in \mathcal{O}$,

$$m(K)\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \varepsilon_K} F_{K,\sigma}(u_K^{n+1}, u_{K,\sigma}^{n+1}) - \sum_{\sigma \in \varepsilon_K} \tau_{K,\sigma}\Big(\phi(u_{K,\sigma}^{n+1}) - \phi(u_K^{n+1})\Big) = 0. \tag{2}$$

Ici, $F_{K,\sigma}$ représente le flux numérique qui doit être monotone, conservatif, régulier et consistent.
Le terme $\tau_{K|L} = \frac{m(K|L)}{d_{K,L}}$ represente la transmissibilité.

Notons que la condition de zéro-flux est bien incluse dans (2).
Si le schéma a une solution, la fonction constante par morceaux $u_{\mathcal{O},\delta t}(t,x)$ définie par :

$$u_{\mathcal{O},\delta t}(t,x) = u_K^{n+1} \text{ pour } x \in K \text{ et } t \in]n\delta t, (n+1)\delta t], \text{ p.p.}$$

sera une solution approchée de (P).

Plan de la presentation

1 Introduction
2 Définition de solution entropique
3 Description du schéma VF
4 Convergence vers une solution entropique
5 Discussions autour de l'hypothèse de "confinement"

1. Estimations *a priori discrètes : estimation* L^∞*, estimation* $L^2(0,T,H^1(\Omega))$*, Translatée en temps et en espace, estimation BV faible.*
2. *Existence de solutions approchées via le Theoreme de Leray-Schauder*
3. *On établit une inégalité entropique continue pour tout* $k \in [0, u_{\max}]$*, pour tout* $\xi \in \mathcal{C}^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^\ell)$*,* $\xi \geq 0$*,*

$$\int_0^T\int_\Omega \left\{\eta_k(u_{\mathcal{O},\delta t})\xi_t + \Big(\Phi_k(u_{\mathcal{O},\delta t}) - \nabla_{\mathcal{O}}\eta_{\phi(k)}(\phi(u_{\mathcal{O},\delta t}))\Big).\nabla\xi\right\} dxdt$$

$$+\int_\Omega \eta_k(u_0)\xi(0,x)dx + \int_0^T\int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(x)|\,\xi(t,x)d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt \geq -\upsilon_{\mathcal{O},n}(\xi);$$

avec : $\forall\xi \in \mathcal{C}^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^\ell)$*,* $\upsilon_{\mathcal{O},n}(\xi) \to 0$ *lorsque* $h \to 0$*. Ici*

$$\nabla_{\mathcal{O}}\eta_{\phi(k)}(\phi(u_{\mathcal{O},\delta t})) = \sum_{n=0}^{N} 1_{[t_n,t_{n+1}]}\sum_{K|L} 1_{\widehat{K|L}}\nabla_{\widehat{K|L}}\eta_{\phi(k)}(\phi(u_{\mathcal{O},\delta t})).$$

Théorème

On suppose $\Omega =]a,b[$ *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Soit* $(u_{\mathcal{O},\delta t})_{\mathcal{O},\delta t}$ *une famille de solutions approchées du problème* (P). *Alors on a*

$$\forall p \in [1,+\infty) \;\; u_{\mathcal{O},\delta t} \longrightarrow u \text{ dans } L^p(Q) \text{ quand } \max(\delta t, h) \longrightarrow 0;$$

$$\nabla_{\mathcal{O}}\phi(u_{\mathcal{O},n}) \rightharpoonup \nabla\phi(u) \text{ dans } L^2(Q) \text{ quand } \max(\delta t, h) \longrightarrow 0$$

où u *est l'unique solution entropique de* (P).

1. Nous prouvons que la suite des solutions approchées converge vers un solution processus entropique $\mu \in L^\infty(Q \times (0,1))$ à valeurs dans $[0, u_{\max}]$ satisfaisant :$\forall k \in [0, u_{\max}]$, $\forall \xi \in \mathcal{C}^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^\ell)^+$, l'inégalité suivante :

$$\int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \left\{ |\mu(\alpha) - k|\xi_t + sign(\mu(\alpha) - k)\Big[f(\mu) - f(k)\Big].\nabla\xi \right\} dxdtd\alpha$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \nabla|\phi(u) - \phi(k)|.\nabla\xi dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |f(k).\eta(x)|\, \xi(t,x) d\mathcal{H}^{\ell-1}(x)dt$$
$$+ \int_\Omega |u_0 - k|\xi(0,x)dx \geq 0,$$

avec $u(t,x) = \displaystyle\int_0^1 \mu(t,x,\alpha)d\alpha$.

2. Ensuite nous prouvons que la solution processus entropique est en fait l'unique solution entropique en montrons qu'elle est indépendante de α.

Unicité : Difficultés

• "Dédoublement de variables" (Kruzkhov) soient $\mu = \mu(t, x, \alpha)$ et $\nu = \nu(s, y, \beta)$ deux solutions processus entropiques telles que : $u(t, x) = \int_0^1 \mu(t, x, \alpha) d\alpha$ et $v(s, y) = \int_0^1 \nu(s, y, \beta) d\beta$.

$$|\mu(\alpha) - \nu(\beta)|_{t,s} + \nabla_{x,y}\Big(sign(\mu - \nu)(f(\mu) - f(\nu) - \nabla\phi(u) + \nabla\phi(v))\Big)$$
$$\leq |(f(v) - \nabla\phi(v)).\eta|\, d\mathcal{H}_\Sigma^{\ell-1} + |(f(u) - \nabla\phi(u)).\eta|\, d\mathcal{H}_\Sigma^{\ell-1}$$

Faire tendre $x \to y$ et $t \to s$ les termes de bord disparaitrons si et seulement si nous avons une trace forte du flux pariétal.

Définition

Une solution entropique u est dite "trace-régulière" si la trace forte au sens L^1 de la composante normale du flux existe.

Définition

La composante normale du flux $\mathcal{F}[u] = (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta$ possède une trace forte au sens L^1 $\gamma\mathcal{F}[\hat{u}] \in L^1_{Loc}(\partial\Omega)$, si :

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s \int_{\hat{x}\in\partial\Omega} \xi(\hat{x}) |\mathcal{F}[u](s,\hat{x}) - \gamma\mathcal{F}[u](\hat{x})| d\hat{x} d\tau = 0.$$

Une telle solution existe pour le problème hyperbolique (avec $\phi(u) \equiv 0$) et le problème parabolique non dégénéré.

Définition

Une solution entropique u est dite "trace-régulière" si la trace forte au sens L^1 de la composante normale du flux existe.

Définition

La composante normale du flux $\mathcal{F}[u] = (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta$ possède une trace forte au sens L^1 $\gamma\mathcal{F}[\hat{u}] \in L^1_{Loc}(\partial\Omega)$, si :

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s \int_{\hat{x}\in\partial\Omega} \xi(\hat{x})|\mathcal{F}[u](s,\hat{x}) - \gamma\mathcal{F}[u](\hat{x})|d\hat{x}d\tau = 0.$$

Une telle solution existe pour le problème hyperbolique (avec $\phi(u) \equiv 0$) et le problème parabolique non dégénéré.

Resolution

On considère le problème stationnaire avec $\Omega = (a,b)$:

$$(S)\left\{\begin{array}{rl} u + \mathrm{div}(f(u) - \nabla\phi(u)) & = g \text{ dans } \Omega, \\ (f(u) - \nabla\phi(u)).\eta & = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

1. Le problème (S) admet une solution u, de plus $(f(u) - \phi(u)_y)$ est continue jusqu'au bord càd, $(f(u) - \phi(u)_y) \in \mathcal{C}_0([a,b])$. La solution u est donc à "*trace-régulière*".
2. Utiliser un argument de densité, en comparant une solution entropique processus de (P) et une solution "*trace-régulière*".

Pour cela, nous allons reformuler problème (P) sous la forme d'une équation d'évolution abstraite gouvernée par un opérateur accretif, afin d'appliquer les résultats classiques de la théorie des semi-groupes non linéaires.

$$v_t + A_{f,\phi}(v) \ni h, \quad v(t=0) = u_0,$$

avec l'opérateur $A_{f,\phi}$ (éventuellement multivoque) définie par sa résolvante

$$(u,z) \in A_{f,\phi} = \left\{ u \text{ telle } u \text{ "\textit{trace-régulière}" de } (S), \text{ avec } g = u + z \right\}.$$

Définition

Soit A un opérateur accretif et $g \in L^1(0,T;X)$. Une fonction $v(t,\alpha)$ est une solution processus integrale du problème d'évolution abstrait $v' + Av \ni g$ sur $[0,T]$, $\nu(0,\alpha) = \nu_0$, si v vérifie pour tout $(\hat{\nu}, z) \in A$

$$\int_0^1 \Big(||v(t,\alpha) - \hat{\nu}|| - ||v(s,\alpha) - \hat{\nu}|| \Big) d\alpha \leq \int_0^1 \int_s^t \Big[v(\tau,\alpha) - \hat{\nu}, g(\tau) - z \Big] d\tau d\alpha \tag{3}$$

pour $0 < s \leq t \leq T$ et

$$\text{ess-}\lim_{t \downarrow 0} \int_0^1 ||v(t,\alpha) - u_0|| d\alpha = 0. \tag{4}$$

Théorème

Supposons que l'opérateur A soit m-accretif dans X et $u_0 \in \overline{D(A)}$, u est solution processus integrale si et seulement si u est indépendante de α et pour tout α, $u(.,\alpha)$ coincïde avec l'unique solution integrale.

Démarche

On montre que la solution processus entropique est solution processus intégrale. D'après la définition précédente, en s'appuyant sur notre opérateur $A_{f,\phi}$ la solution processus intégrale coïncide avec l'unique solution intégrale qui elle même est solution entropique de (P)

Proposition

Les propriétés suivantes sont vraies

1. $A_{f,\phi}$ *est accretif dans* $L^1(\Omega)$.
2. *Pour tout* λ *suffisamment petit,* $R(I+\lambda A_{f,\phi})$ *est inclus dans* $L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$.
3. $\overline{D(A_{f,\phi})} = L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$.

On a unicité d'une telle solution si $A_{f,\phi}$ est m-accretif dans $L^1(\Omega)$ à domaine dense ($\overline{D(A_{f,\phi})} = L^1(\Omega;[0,u_{\max}])$).

Ph. Bénilan, Crandall, M. G. and Pazy, A., *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*. Preprint book.

Plan de la presentation

1. Introduction
2. Définition de solution entropique
3. Description du schéma VF
4. Convergence vers une solution entropique
5. Discussions autour de l'hypothèse de "confinement"

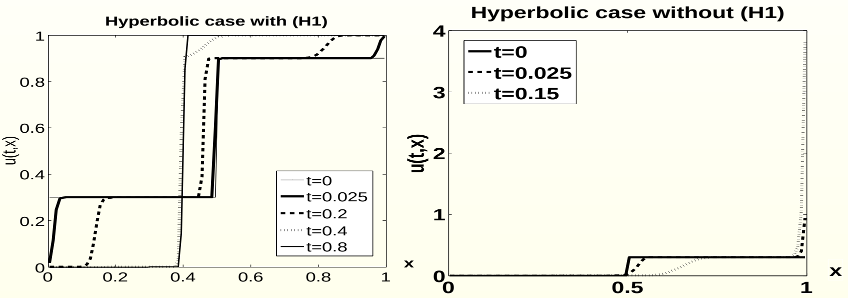

FIGURE : Hyperbolic zero-flux problem : with and without (H1)

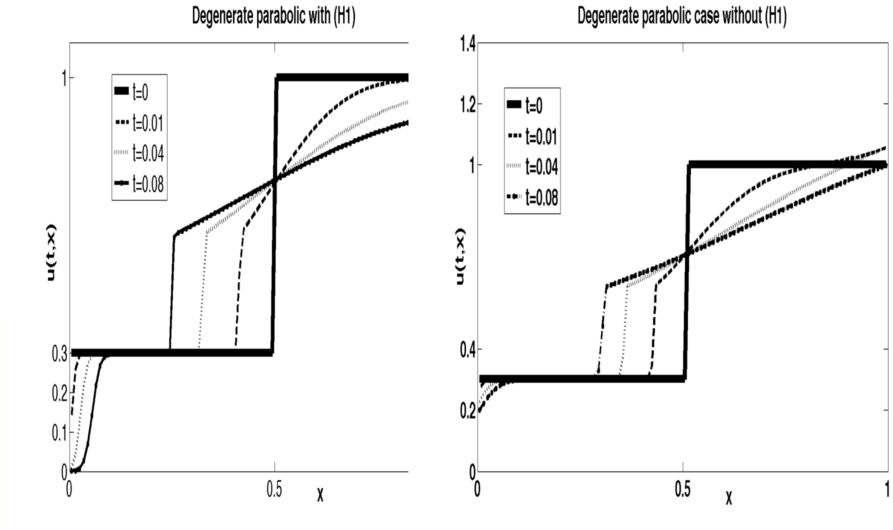

FIGURE : Degenerate parabolic zero-flux problem : with and without (H1)

MERCI POUR VOTRE ATTENTION