Point vue modèle théorique des extensions algébriques de corps

Nadja Hempel

Université Claude Bernard Lyon 1
Institut Camille Jordan

Mai 2014

Définition basic

- **Langage** : $\mathcal{L} = \{F, R, C\}$ (qui contient toujours l'égalité)

  F : une famille de fonctions
  R : une famille de relations
  C : une famille de constantes

  Exemples :

  - $\mathcal{L} = \{<\}$
  - $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$
  - $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

- **Structure** : $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$

  Exemples :

  - $(\mathbb{Q}, <)$
  - $(\mathbb{Q}; +, 0)$
  - $(\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1)$

Définition basic

- **Langage** : $\mathcal{L} = \{F, R, C\}$ (qui contient toujours l'égalité)

  F : une famille de fonctions
  R : une famille de relations
  C : une famille de constantes

  Exemples :

  - $\mathcal{L} = \{<\}$
  - $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$
  - $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

- **Structure** : $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$

  Exemples :

  - $(\mathbb{Q}, <)$
  - $(\mathbb{Q}; +, 0)$
  - $(\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1)$

Définition basic

- **Langage** : $\mathcal{L} = \{F, R, C\}$ (qui contient toujours l'égalité)

  F : une famille de fonctions
  R : une famille de relations
  C : une famille de constantes

  Exemples :

  - $\mathcal{L} = \{<\}$
  - $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$
  - $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

- **Structure** : $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$

  Exemples :

  - $(\mathbb{Q}, <)$
  - $(\mathbb{Q}; +, 0)$
  - $(\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1)$

Définition basic

- **Langage** : $\mathcal{L} = \{F, R, C\}$ (qui contient toujours l'égalité)

  F : une famille de fonctions
  R : une famille de relations
  C : une famille de constantes

  Exemples :

  - $\mathcal{L} = \{<\}$
  - $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$
  - $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

- **Structure** : $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$

  Exemples :

  - $(\mathbb{Q}, <)$
  - $(\mathbb{Q}; +, 0)$
  - $(\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1)$

Définition basic

- **Langage** : $\mathcal{L} = \{F, R, C\}$ (qui contient toujours l'égalité)

  F : une famille de fonctions
  R : une famille de relations
  C : une famille de constantes

  Exemples :

  - $\mathcal{L} = \{<\}$
  - $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$
  - $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

- **Structure** : $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$

  Exemples :

  - $(\mathbb{Q}, <)$
  - $(\mathbb{Q}; +, 0)$
  - $(\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1)$

Définition basic

- **Langage** : $\mathcal{L} = \{F, R, C\}$ (qui contient toujours l'égalité)

  F : une famille de fonctions
  R : une famille de relations
  C : une famille de constantes

  Exemples :

  - $\mathcal{L} = \{<\}$
  - $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$
  - $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

- **Structure** : $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$

  Exemples :

  - $(\mathbb{Q}, <)$
  - $(\mathbb{Q}; +, 0)$
  - $(\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1)$

Définition basic

- **Langage** : $\mathcal{L} = \{F, R, C\}$ (qui contient toujours l'égalité)

  F : une famille de fonctions
  R : une famille de relations
  C : une famille de constantes

  Exemples :

  - $\mathcal{L} = \{<\}$
  - $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$
  - $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

- **Structure** : $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$

  Exemples :

  - $(\mathbb{Q}, <)$
  - $(\mathbb{Q}; +, 0)$
  - $(\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1)$

Définition basic

- **Langage** : $\mathcal{L} = \{F, R, C\}$ (qui contient toujours l'égalité)

  F : une famille de fonctions
  R : une famille de relations
  C : une famille de constantes

  Exemples :

  - $\mathcal{L} = \{<\}$
  - $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$
  - $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

- **Structure** : $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$

  Exemples :

  - $(\mathbb{Q}, <)$
  - $(\mathbb{Q}; +, 0)$
  - $(\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1)$

Définition basic

- **Langage** : $\mathcal{L} = \{F, R, C\}$ (qui contient toujours l'égalité)

  F : une famille de fonctions
  R : une famille de relations
  C : une famille de constantes

  Exemples :

  - $\mathcal{L} = \{<\}$
  - $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$
  - $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$

- **Structure** : $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$

  Exemples :

  - $(\mathbb{Q}, <)$
  - $(\mathbb{Q}; +, 0)$
  - $(\mathbb{Q}; +, -, \cdot, 0, 1)$

Formule

Formule sans variable libre (énoncé) :

Exemples :

- $\forall x \exists y \ (x \cdot y = 1)$ (existence d'un inverse)
- $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ (commutativité)
- $\forall x \forall y \ (x \leq y \vee y \leq x)$ (ordre linéaire)
- $\forall x \forall y \ [(x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y]$

Théorie : un ensemble T d'énoncés cohérents

Formule

Formule sans variable libre (énoncé) :

Exemples :

- $\forall x \exists y \ (x \cdot y = 1)$ (existence d'un inverse)
- $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ (commutativité)
- $\forall x \forall y \ (x \leq y \vee y \leq x)$ (ordre linéaire)
- $\forall x \forall y \ [(x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y]$

Théorie : un ensemble T d'énoncés cohérents

Formule

Formule sans variable libre (énoncé) :

Exemples :

- $\forall x \exists y \ (x \cdot y = 1)$ (existence d'un inverse)
- $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ (commutativité)
- $\forall x \forall y \ (x \leq y \vee y \leq x)$ (ordre linéaire)
- $\forall x \forall y \ [(x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y]$

Théorie : un ensemble T d'énoncés cohérents

Formule

Formule sans variable libre (énoncé) :

Exemples :

- $\forall x \exists y \ (x \cdot y = 1)$ (existence d'un inverse)
- $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ (commutativité)
- $\forall x \forall y \ (x \leq y \vee y \leq x)$ (ordre linéaire)
- $\forall x \forall y \ [(x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y]$

Théorie : un ensemble T d'énoncés cohérents

Formule

Formule sans variable libre (énoncé) :

Exemples :

- $\forall x \exists y \ (x \cdot y = 1)$ (existence d'un inverse)
- $\forall x \forall y \ (x \cdot y = y \cdot x)$ (commutativité)
- $\forall x \forall y \ (x \leq y \vee y \leq x)$ (ordre linéaire)
- $\forall x \forall y \ [(x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y]$

Théorie : un ensemble T d'énoncés cohérents

Formule

Formule sans variable libre (énoncé) :

Exemples :

- $\forall x \exists y\ (x \cdot y = 1)$ (existence d'un inverse)
- $\forall x \forall y\ (x \cdot y = y \cdot x)$ (commutativité)
- $\forall x \forall y\ (x \leq y \vee y \leq x)$ (ordre linéaire)
- $\forall x \forall y\ [(x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y]$

Théorie : un ensemble T d'énoncés cohérents

Formule

Formule avec des variables libres

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; y) = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \cdot y = y \cdot x_i)) \quad (y \in C(x_1, \dots, x_n))$
- $\psi(x) = \exists z\ (z^n = x) \quad$ (x a une racine n^{eme})

Formule avec des paramètre (dans une structure M)

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; a)$: x_i commute avec l'élément a
- $\phi(\bar{a}; y)$: y est un élément de $C(a_1, \dots, a_n)$

Satisfaction : On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{M}$

Modèle : $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in T$

En revanche, pour une structure $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M} \models \phi\}$

Formule

Formule avec des variables libres

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; y) = \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \cdot y = y \cdot x_i)) \quad (y \in C(x_1, \ldots, x_n))$
- $\psi(x) = \exists z\ (z^n = x) \quad$ (x a une racine n^{eme})

Formule avec des paramètre (dans une structure M)

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; a)$: x_i commute avec l'élément a
- $\phi(\bar{a}; y)$: y est un élément de $C(a_1, \ldots, a_n)$

Satisfaction : On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{M}$

Modèle : $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in T$

En revanche, pour une structure $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M} \models \phi\}$

Formule

Formule avec des variables libres

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; y) = \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \cdot y = y \cdot x_i)) \quad (y \in C(x_1, \dots, x_n))$
- $\psi(x) = \exists z \, (z^n = x) \quad$ (x a une racine n^{eme})

Formule avec des paramètre (dans une structure M)

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; a)$: x_i commute avec l'élément a
- $\phi(\bar{a}; y)$: y est un élément de $C(a_1, \dots, a_n)$

Satisfaction : On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{M}$

Modèle : $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in T$

En revanche, pour une structure $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M} \models \phi\}$

Formule

Formule avec des variables libres

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; y) = \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \cdot y = y \cdot x_i)) \quad (y \in C(x_1, \ldots, x_n))$
- $\psi(x) = \exists z\ (z^n = x) \quad$ (x a une racine n^{eme})

Formule avec des paramètre (dans une structure M)

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; a)$: x_i commute avec l'élément a
- $\phi(\bar{a}; y)$: y est un élément de $C(a_1, \ldots, a_n)$

Satisfaction : On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{M}$

Modèle : $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in T$

En revanche, pour une structure $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M} \models \phi\}$

Formule

Formule avec des variables libres

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; y) = \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \cdot y = y \cdot x_i)) \quad (y \in C(x_1, \ldots, x_n))$
- $\psi(x) = \exists z \ (z^n = x) \quad$ (x a une racine n^{eme})

Formule avec des paramètre (dans une structure M)

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; a)$: x_i commute avec l'élément a
- $\phi(\bar{a}; y)$: y est un élément de $C(a_1, \ldots, a_n)$

Satisfaction : On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{M}$

Modèle : $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in T$

En revanche, pour une structure $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M} \models \phi\}$

Formule

Formule avec des variables libres

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; y) = \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \cdot y = y \cdot x_i))$ $(y \in C(x_1, \ldots, x_n))$
- $\psi(x) = \exists z\ (z^n = x)$ (x a une racine n^{eme})

Formule avec des paramètre (dans une structure M)

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; a)$: x_i commute avec l'élément a
- $\phi(\bar{a}; y)$: y est un élément de $C(a_1, \ldots, a_n)$

Satisfaction : On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{M}$

Modèle : $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in T$

En revanche, pour une structure $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M} \models \phi\}$

Formule

Formule avec des variables libres

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; y) = \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \cdot y = y \cdot x_i)) \quad (y \in C(x_1, \ldots, x_n))$
- $\psi(x) = \exists z\ (z^n = x) \quad$ (x a une racine n^{eme})

Formule avec des paramètre (dans une structure M)

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; a)$: x_i commute avec l'élément a
- $\phi(\bar{a}; y)$: y est un élément de $C(a_1, \ldots, a_n)$

Satisfaction : On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{M}$

Modèle : $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in T$

En revanche, pour une structure $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M} \models \phi\}$

Formule

Formule avec des variables libres

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; y) = \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \cdot y = y \cdot x_i)) \quad (y \in C(x_1, \ldots, x_n))$
- $\psi(x) = \exists z\ (z^n = x) \quad$ (x a une racine n^{eme})

Formule avec des paramètre (dans une structure M)

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; a)$: x_i commute avec l'élément a
- $\phi(\bar{a}; y)$: y est un élément de $C(a_1, \ldots, a_n)$

Satisfaction : On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{M}$

Modèle : $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in T$

En revanche, pour une structure $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M} \models \phi\}$

Formule

Formule avec des variables libres

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; y) = \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \cdot y = y \cdot x_i)) \quad (y \in C(x_1, \ldots, x_n))$
- $\psi(x) = \exists z \, (z^n = x) \quad$ (x a une racine n^{eme})

Formule avec des paramètre (dans une structure M)

Exemples :

- $\phi(\bar{x}; a)$: x_i commute avec l'élément a
- $\phi(\bar{a}; y)$: y est un élément de $C(a_1, \ldots, a_n)$

Satisfaction : On écrit $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si $\phi(\bar{a})$ est vrai dans $\mathcal{M}$

Modèle : $\mathcal{M} \models \phi$ pour tout $\phi \in T$

En revanche, pour une structure $\mathcal{M}$, $Th(\mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M} \models \phi\}$

Ensemble définissable

Definition

Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n; \bar{a})$ une formule et $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$ une structure. Alors,

$$\phi(M, \bar{a}) = \{\bar{m} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m})\}$$

est un *ensemble définissable* de M^n.

Une fonction est dite *définissable* si son graphe est un ensemble définissable.

Propriétés des ensembles définissables :

- clos par intersections et unions finis
- clos par complément
- clos par projections

Ensemble définissable

Definition

Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n; \bar{a})$ une formule et $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$ une structure. Alors,

$$\phi(M, \bar{a}) = \{\bar{m} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m})\}$$

est un *ensemble définissable* de M^n.

Une fonction est dite *définissable* si son graphe est un ensemble définissable.

Propriétés des ensembles définissables :

- clos par intersections et unions finis
- clos par complément
- clos par projections

Ensemble définissable

Definition

Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n; \bar{a})$ une formule et $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$ une structure. Alors,

$$\phi(M, \bar{a}) = \{\bar{m} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m})\}$$

est un *ensemble définissable* de M^n.

Une fonction est dite *définissable* si son graphe est un ensemble définissable.

Propriétés des ensembles définissables :

- clos par intersections et unions finis
- clos par complément
- clos par projections

Ensemble définissable

Definition

Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n; \bar{a})$ une formule et $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$ une structure. Alors,

$$\phi(M, \bar{a}) = \{\bar{m} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m})\}$$

est un *ensemble définissable* de M^n.

Une fonction est dite *définissable* si son graphe est un ensemble définissable.

Propriétés des ensembles définissables :

- clos par intersections et unions finis
- clos par complément
- clos par projections

Ensemble définissable

Definition

Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n; \bar{a})$ une formule et $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$ une structure. Alors,

$$\phi(M, \bar{a}) = \{\bar{m} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m})\}$$

est un *ensemble définissable* de M^n.

Une fonction est dite *définissable* si son graphe est un ensemble définissable.

Propriétés des ensembles définissables :

- clos par intersections et unions finis
- clos par complément
- clos par projections

Ensemble définissable

Definition

Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n; \bar{a})$ une formule et $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$ une structure. Alors,

$$\phi(M, \bar{a}) = \{\bar{m} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m})\}$$

est un *ensemble définissable* de M^n.

Une fonction est dite *définissable* si son graphe est un ensemble définissable.

Propriétés des ensembles définissables :

- clos par intersections et unions finis
- clos par complément
- clos par projections

Ensemble définissable

Definition

Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n; \bar{a})$ une formule et $\mathcal{M} = (M; F^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}})$ une structure. Alors,

$$\phi(M, \bar{a}) = \{\bar{m} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m})\}$$

est un *ensemble définissable* de M^n.

Une fonction est dite *définissable* si son graphe est un ensemble définissable.

Propriétés des ensembles définissables :

- clos par intersections et unions finis
- clos par complément
- clos par projections

Groupes et corps définissables

Un groupe définissable dans une structure $\mathcal{M}$ est un ensemble $G \subset M^n$ définissable tel que $+$ est une fonction définissable sur G.

Analogue, on peut considérer un corps définissable.

Groupes et corps définissables

Un groupe définissable dans une structure $\mathcal{M}$ est un ensemble $G \subset M^n$ définissable tel que $+$ est une fonction définissable sur G.

Analogue, on peut considérer un corps définissable.

But

On veux étudier la connexion entre les propriétés de la théorie du premier ordre d'une structure et les propriétés algébrique des corps définis dedans.

Théorie stable

On ne peut pas définir un ordre linéaire.

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et une suite de paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ tel que :

$$\phi(a_i, a_j, \bar{b}) \Leftrightarrow i < j$$

Non Exemple :

$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ $\quad \phi(x, y) = \exists z\ (x + z^2 = y)$ $\quad (n : n \in \mathbb{N})$

$$\phi(n, m) \leftrightarrow n < m$$

Exemples :

- corps algébriquement clos ou séparablement clos
- espace vectoriel infini
- groupe libre

Théorie stable

On ne peut pas définir un ordre linéaire.

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et une suite de paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ tel que :

$$\phi(a_i, a_j, \bar{b}) \Leftrightarrow i < j$$

Non Exemple :

$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ $\phi(x, y) = \exists z\ (x + z^2 = y)$ $(n : n \in \mathbb{N})$

$$\phi(n, m) \leftrightarrow n < m$$

Exemples :

- corps algébriquement clos ou séparablement clos
- espace vectoriel infini
- groupe libre

Théorie stable

On ne peut pas définir un ordre linéaire.

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et une suite de paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ tel que :

$$\phi(a_i, a_j, \bar{b}) \Leftrightarrow i < j$$

Non Exemple :
$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ $\quad \phi(x, y) = \exists z \ (x + z^2 = y)$ $\quad (n : n \in \mathbb{N})$

$$\phi(n, m) \leftrightarrow n < m$$

Exemples :

- corps algébriquement clos ou séparablement clos
- espace vectoriel infini
- groupe libre

Théorie stable

On ne peut pas définir un ordre linéaire.

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et une suite de paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ tel que :

$$\phi(a_i, a_j, \bar{b}) \Leftrightarrow i < j$$

Non Exemple :
$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ $\quad \phi(x, y) = \exists z\ (x + z^2 = y)$ $\quad (n : n \in \mathbb{N})$

$$\phi(n, m) \leftrightarrow n < m$$

Exemples :

- corps algébriquement clos ou séparablement clos
- espace vectoriel infini
- groupe libre

Théorie stable

On ne peut pas définir un ordre linéaire.

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et une suite de paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ tel que :

$$\phi(a_i, a_j, \bar{b}) \Leftrightarrow i < j$$

Non Exemple :
$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \qquad \phi(x, y) = \exists z\ (x + z^2 = y) \qquad (n : n \in \mathbb{N})$

$$\phi(n, m) \leftrightarrow n < m$$

Exemples :

- corps algébriquement clos ou séparablement clos
- espace vectoriel infini
- groupe libre

Théorie stable

On ne peut pas définir un ordre linéaire.

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et une suite de paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ tel que :

$$\phi(a_i, a_j, \bar{b}) \Leftrightarrow i < j$$

Non Exemple :
$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ $\quad \phi(x, y) = \exists z \ (x + z^2 = y)$ $\quad (n : n \in \mathbb{N})$

$$\phi(n, m) \leftrightarrow n < m$$

Exemples :

- corps algébriquement clos ou séparablement clos
- espace vectoriel infini
- groupe libre

Théorie stable

On ne peut pas définir un ordre linéaire.

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et une suite de paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ tel que :

$$\phi(a_i, a_j, \bar{b}) \Leftrightarrow i < j$$

Non Exemple :
$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ $\quad \phi(x, y) = \exists z \ (x + z^2 = y)$ $\quad (n : n \in \mathbb{N})$

$$\phi(n, m) \leftrightarrow n < m$$

Exemples :

- corps algébriquement clos ou séparablement clos
- espace vectoriel infini
- groupe libre

Corps algébriquement clos

Théorème (Macintyre et Cherlin-Shelah)

Un corps K définissable dans une théorie stable avec $SU(K) < \infty$ (notion rudimentaire de dimension) est algébriquement clos.

Par contre, on peut montrer que tout corps K qui est algébriquement clos est stable et satisfait $SU(K) < \infty$. Alors :

Corollaire

La théorie d'un corps K est stable avec $SU(K) < \infty$ si et seulement si il est algébriquement clos.

Corps algébriquement clos

Théorème (Macintyre et Cherlin-Shelah)

Un corps K définissable dans une théorie stable avec $SU(K) < \infty$ (notion rudimentaire de dimension) est algébriquement clos.

Par contre, on peut montrer que tout corps K qui est algébriquement clos est stable et satisfait $SU(K) < \infty$. Alors :

Corollaire

La théorie d'un corps K est stable avec $SU(K) < \infty$ si et seulement si il est algébriquement clos.

Corps algébriquement clos

Théorème (Macintyre et Cherlin-Shelah)

Un corps K définissable dans une théorie stable avec $SU(K) < \infty$ (notion rudimentaire de dimension) est algébriquement clos.

Par contre, on peut montrer que tout corps K qui est algébriquement clos est stable et satisfait $SU(K) < \infty$. Alors :

Corollaire

La théorie d'un corps K est stable avec $SU(K) < \infty$ si et seulement si il est algébriquement clos.

Soit K un corps de caractéristique $p > 0$.

Definition

On dit qu'une extension de corps L/K est une *extension d'Artin-Schreier* si $L = K(a)$ avec $a^p - a \in K$. Un corps est dit *Artin-Schreier clos* si jamais il n'admet pas d'extensions propres d'Artin Schreier.

Extensions d'Artin-Schreier

Soit K un corps de caractéristique $p > 0$.

Definition

On dit qu'une extension de corps L/K est une *extension d'Artin-Schreier* si $L = K(a)$ avec $a^p - a \in K$. Un corps est dit *Artin-Schreier clos* si jamais il n'admet pas d'extensions propres d'Artin Schreier.

Extensions d'Artin-Schreier

Soit K un corps de caractéristique $p > 0$.

Definition

On dit qu'une extension de corps L/K est une *extension d'Artin-Schreier* si $L = K(a)$ avec $a^p - a \in K$. Un corps est dit *Artin-Schreier clos* si jamais il n'admet pas d'extensions propres d'Artin Schreier.

Corps stable

Théorème (Scanlon)

Un corps K définissable dans un théorie stable est Artin-Schreier clos.

Conjecture

La théorie d'un corps est stable si et seulement si il est séparablement clos.

Corps stable

Théorème (Scanlon)

Un corps K définissable dans un théorie stable est Artin-Schreier clos.

Conjecture

La théorie d'un corps est stable si et seulement si il est séparablement clos.

Théorie simple

On ne peut pas définir d'arbre tel que tout noeud a un nombre infini de successeurs

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et des paramètres $(a_{\sigma\restriction n} : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ tels que :

$$\{\phi(x, a_{\sigma\restriction n}; \bar{b}) : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} \text{ est consistent}$$

et pour toute $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\{\phi(x, a_{(\sigma\restriction n)^\frown i}; \bar{b}) : i \in \mathbb{N}\} \text{ est inconsistent}$$

Exemples :

- graphe aléatoire
- corps algébriquement clos avec un automorphisme
- corps pseudo fini
- espace vectoriel avec une forme bilinéaire

Théorie simple

On ne peut pas définir d'arbre tel que tout noeud a un nombre infini de successeurs

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et des paramètres $(a_{\sigma\restriction n} : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ tels que :

$$\{\phi(x, a_{\sigma\restriction n}; \bar{b}) : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} \text{ est consistent}$$

et pour toute $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\{\phi(x, a_{(\sigma\restriction n)\hat{}i}; \bar{b}) : i \in \mathbb{N}\} \text{ est inconsistent}$$

Exemples :

- graphe aléatoire
- corps algébriquement clos avec un automorphisme
- corps pseudo fini
- espace vectoriel avec une forme bilinéaire

Théorie simple

On ne peut pas définir d'arbre tel que tout noeud a un nombre infini de successeurs

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et des paramètres $(a_{\sigma\restriction n} : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ tels que :

$$\{\phi(x, a_{\sigma\restriction n}; \bar{b}) : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} \text{ est consistent}$$

et pour toute $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\{\phi(x, a_{(\sigma\restriction n)^\frown i}; \bar{b}) : i \in \mathbb{N}\} \text{ est inconsistent}$$

Exemples :

- graphe aléatoire
- corps algébriquement clos avec un automorphisme
- corps pseudo fini
- espace vectoriel avec une forme bilinéaire

Théorie simple

On ne peut pas définir d'arbre tel que tout noeud a un nombre infini de successeurs

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et des paramètres $(a_{\sigma\restriction n} : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ tels que :

$$\{\phi(x, a_{\sigma\restriction n}; \bar{b}) : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} \text{ est consistent}$$

et pour toute $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\{\phi(x, a_{(\sigma\restriction n)^\frown i}; \bar{b}) : i \in \mathbb{N}\} \text{ est inconsistent}$$

Exemples :

- graphe aléatoire
- corps algébriquement clos avec un automorphisme
- corps pseudo fini
- espace vectoriel avec une forme bilinéaire

Théorie simple

On ne peut pas définir d'arbre tel que tout noeud a un nombre infini de successeurs

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et des paramètres $(a_{\sigma\restriction n} : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ tels que :

$$\{\phi(x, a_{\sigma\restriction n}; \bar{b}) : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} \text{ est consistent}$$

et pour toute $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\{\phi(x, a_{(\sigma\restriction n)^\frown i}; \bar{b}) : i \in \mathbb{N}\} \text{ est inconsistent}$$

Exemples :

- graphe aléatoire
- corps algébriquement clos avec un automorphisme
- corps pseudo fini
- espace vectoriel avec une forme bilinéaire

Théorie simple

On ne peut pas définir d'arbre tel que tout noeud a un nombre infini de successeurs

c-à-d : il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{b})$ et des paramètres $(a_{\sigma\restriction n} : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ tels que :

$$\{\phi(x, a_{\sigma\restriction n}; \bar{b}) : n \in \mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} \text{ est consistent}$$

et pour toute $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\{\phi(x, a_{(\sigma\restriction n)^\frown i}; \bar{b}) : i \in \mathbb{N}\} \text{ est inconsistent}$$

Exemples :

- graphe aléatoire
- corps algébriquement clos avec un automorphisme
- corps pseudo fini
- espace vectoriel avec une forme bilinéaire

Corps pseudo algébriquement clos

Definition

Un corps est pseudo algébriquement clos (PAC) si chaque variété absolument irreéductible défini sur K a un point K-rationnel.

Definition

On dit qu'un corps est borné si pour tout n il admet qu'un nombre fini d'extension de degrés n.

Corps pseudo algébriquement clos

Definition

Un corps est pseudo algébriquement clos (PAC) si chaque variété absolument irreéductible défini sur K a un point K-rationnel.

Definition

On dit qu'un corps est borné si pour tout n il admet qu'un nombre fini d'extension de degrés n.

Corps simple avec $SU(K) < \infty$

Théorème (Hrushovski)

La théorie d'un corps PAC, parfait et borné est simple avec $SU(K) < \infty$.

Par contre :

Théorème (Pillay, Poizat)

Un corps K définissable dans une théorie simple avec $SU(K) < \infty$ est parfait et borné.

Conjecture

La théorie d'un corps est simple avec $SU(K) < \infty$ si et seulement si il est PAC, parfait et borné.

Corps simple avec $SU(K) < \infty$

Théorème (Hrushovski)

La théorie d'un corps PAC, parfait et borné est simple avec $SU(K) < \infty$.

Par contre :

Théorème (Pillay, Poizat)

Un corps K définissable dans une théorie simple avec $SU(K) < \infty$ est parfait et borné.

Conjecture

La théorie d'un corps est simple avec $SU(K) < \infty$ si et seulement si il est PAC, parfait et borné.

Corps simple avec $SU(K) < \infty$

Théorème (Hrushovski)

La théorie d'un corps PAC, parfait et borné est simple avec $SU(K) < \infty$.

Par contre :

Théorème (Pillay, Poizat)

Un corps K définissable dans une théorie simple avec $SU(K) < \infty$ est parfait et borné.

Conjecture

La théorie d'un corps est simple avec $SU(K) < \infty$ si et seulement si il est PAC, parfait et borné.

Corps simple

Théorème (Kaplan, Scanlon, Wagner)

Un corps K définissable dans une théorie simple a qu'un nombre fini d'extensions d'Artin-Schreier.

Théorie NIP

On ne peut pas définir tous les sous ensembles d'un ensemble infini.

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N})$ tels que :

$$\phi(a_i, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow i \in I$$

- les théories stables
- corps valués algébriquement clos
- groupes ordornnés abeliens

Théorie NIP

On ne peut pas définir tous les sous ensembles d'un ensemble infini.

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N})$ tels que :

$$\phi(a_i, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow i \in I$$

- les théories stables
- corps valués algébriquement clos
- groupes ordornnés abeliens

Théorie NIP

On ne peut pas définir tous les sous ensembles d'un ensemble infini.

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N})$ tels que :

$$\phi(a_i, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow i \in I$$

- les théories stables
- corps valués algébriquement clos
- groupes ordornnés abeliens

Théorie NIP

On ne peut pas définir tous les sous ensembles d'un ensemble infini.

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N})$ tels que :

$$\phi(a_i, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow i \in I$$

- les théories stables
- corps valués algébriquement clos
- groupes ordornnés abeliens

Théorie NIP

On ne peut pas définir tous les sous ensembles d'un ensemble infini.

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i : i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N})$ tels que :

$$\phi(a_i, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow i \in I$$

- les théories stables
- corps valués algébriquement clos
- groupes ordornnés abeliens

Théorie NIP$_n$

On ne peut pas définir tous les sous ensembles de $\mathbb{N}^n$

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x_1, \dots x_n, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i^j : 1 < j < n, i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N}^n)$ tels que :

$$\phi(a_{i_1}^1, \dots, a_{i_n}^n, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow (i_1, \dots, i_n) \in I$$

Remarque

- *Les théories NIP$_1$ coincident avec les théories NIP*
- *Toute théorie NIP$_n$ est NIP$_{n+1}$*

Exemples :

- Le graphe sans triangle est NIP$_2$
- Le n-hyper graphe aléatoire est NIP$_n$

Théorie NIP$_n$

On ne peut pas définir tous les sous ensembles de $\mathbb{N}^n$

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x_1, \ldots x_n, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i^j : 1 < j < n, i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N}^n)$ tels que :

$$\phi(a_{i_1}^1, \ldots, a_{i_n}^n, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow (i_1, \ldots, i_n) \in I$$

Remarque

- *Les théories NIP$_1$ coincident avec les théories NIP*
- *Toute théorie NIP$_n$ est NIP$_{n+1}$*

Exemples :

- Le graphe sans triangle est NIP$_2$
- Le n-hyper graphe aléatoire est NIP$_n$

Théorie NIP$_n$

On ne peut pas définir tous les sous ensembles de $\mathbb{N}^n$

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x_1, \ldots x_n, y; \bar{c})$, des paramètres $(a^j_i : 1 < j < n, i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N}^n)$ tels que :

$$\phi(a^1_{i_1}, \ldots, a^n_{i_n}, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow (i_1, \ldots, i_n) \in I$$

Remarque

- *Les théories NIP$_1$ coincident avec les théories NIP*
- *Toute théorie NIP$_n$ est NIP$_{n+1}$*

Exemples :

- Le graphe sans triangle est NIP$_2$
- Le n-hyper graphe aléatoire est NIP$_n$

Théorie NIP$_n$

On ne peut pas définir tous les sous ensembles de $\mathbb{N}^n$

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x_1, \ldots x_n, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i^j : 1 < j < n, i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N}^n)$ tels que :

$$\phi(a^1_{i_1}, \ldots, a^n_{i_n}, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow (i_1, \ldots, i_n) \in I$$

Remarque

- *Les théories NIP$_1$ coincident avec les théories NIP*
- *Toute théorie NIP$_n$ est NIP$_{n+1}$*

Exemples :

- Le graphe sans triangle est NIP$_2$
- Le n-hyper graphe aléatoire est NIP$_n$

Théorie NIP$_n$

On ne peut pas définir tous les sous ensembles de $\mathbb{N}^n$

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x_1, \dots x_n, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i^j : 1 < j < n, i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N}^n)$ tels que :

$$\phi(a_{i_1}^1, \dots, a_{i_n}^n, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow (i_1, \dots, i_n) \in I$$

Remarque

- *Les théories NIP$_1$ coincident avec les théories NIP*
- *Toute théorie NIP$_n$ est NIP$_{n+1}$*

Exemples :

- Le graphe sans triangle est NIP$_2$
- Le n-hyper graphe aléatoire est NIP$_n$

Théorie NIP$_n$

On ne peut pas définir tous les sous ensembles de $\mathbb{N}^n$

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x_1, \ldots x_n, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i^j : 1 < j < n, i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N}^n)$ tels que :

$$\phi(a_{i_1}^1, \ldots, a_{i_n}^n, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow (i_1, \ldots, i_n) \in I$$

Remarque

- *Les théories NIP$_1$ coincident avec les théories NIP*
- *Toute théorie NIP$_n$ est NIP$_{n+1}$*

Exemples :

- Le graphe sans triangle est NIP$_2$
- Le n-hyper graphe aléatoire est NIP$_n$

Théorie NIP$_n$

On ne peut pas définir tous les sous ensembles de $\mathbb{N}^n$

c-a-d il n'existe pas une formule $\phi(x_1, \ldots x_n, y; \bar{c})$, des paramètres $(a_i^j : 1 < j < n, i \in \mathbb{N})$ et des paramètres $(b_I : I \subset \mathbb{N}^n)$ tels que :

$$\phi(a_{i_1}^1, \ldots, a_{i_n}^n, b_I; \bar{c}) \Leftrightarrow (i_1, \ldots, i_n) \in I$$

Remarque

- *Les théories NIP$_1$ coincident avec les théories NIP*
- *Toute théorie NIP$_n$ est NIP$_{n+1}$*

Exemples :

- Le graphe sans triangle est NIP$_2$
- Le n-hyper graphe aléatoire est NIP$_n$

Corps NIP$_n$

Théorème (Kaplan, Scanlon, Wagner)

Un corps définissable dans une théorie NIP est Artin-Schreier clos.

Théorème (H)

Un corps définissable dans une théorie NIP$_n$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$ est Artin-Schreier clos.

Théorème (H)

La théorie d'un corps PAC non separablement clos n'est pas NIP$_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corps NIP$_n$

Théorème (Kaplan, Scanlon, Wagner)

Un corps définissable dans une théorie NIP est Artin-Schreier clos.

Théorème (H)

Un corps définissable dans une théorie NIP$_n$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$ est Artin-Schreier clos.

Théorème (H)

La théorie d'un corps PAC non separablement clos n'est pas NIP$_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corps NIP$_n$

Théorème (Kaplan, Scanlon, Wagner)

Un corps définissable dans une théorie NIP est Artin-Schreier clos.

Théorème (H)

Un corps définissable dans une théorie NIP$_n$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$ est Artin-Schreier clos.

Théorème (H)

La théorie d'un corps PAC non separablement clos n'est pas NIP$_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.