Modèle de convection-diffusion : application à la distribution des bactéries dans une rivière

Imene Meriem Mostefaoui

Laboratoire MIA
Université de La Rochelle

Colloque Inter'Actions 2014 en Mathématiques, 19-23 Mai

- Les systèmes de réaction-diffusion sont des cas particuliers des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques.
- Ces systèmes décrivent la manière dont la concentration ou la densité distribuée dans l'espace varie sous l'influence de deux procesus :
  - les interactions locales des espèces
  - la diffusion

- Les systèmes de réaction-diffusion sont des cas particuliers des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques.
- Ces systèmes décrivent la manière dont la concentration ou la densité distribuée dans l'espace varie sous l'influence de deux procesus :
  - les interactions locales des espèces
  - la diffusion

- Les systèmes de réaction-diffusion sont des cas particuliers des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques.
- Ces systèmes décrivent la manière dont la concentration ou la densité distribuée dans l'espace varie sous l'influence de deux procesus :
  - les interactions locales des espèces
  - la diffusion

- Les systèmes de réaction-diffusion sont des cas particuliers des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques.
- Ces systèmes décrivent la manière dont la concentration ou la densité distribuée dans l'espace varie sous l'influence de deux procesus :
  - les interactions locales des espèces
  - la diffusion

Forme générale

On s'intéresse aux systèmes de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M\frac{\partial u}{\partial x} + f(u, x, t), \quad t > 0, \tag{1}$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in I \subset \mathbb{R}, \tag{2}$$

où $u = (u_1, u_2, ..., u_3)$, $M = (m_1, m_2, ..., m_3) \in \mathbb{R}^n$, $D = diag(d_1, d_2, ..., d_3)$, avec $d_i \geq 0$, pour tout $i = 1, 2, ..., n$, f est une fonction de classe C^1.

Plan de l'exposé

Historique

- Durant la première guerre mondiale Alexander Flemming engage des recherches sur la bactérie
- En 1928 le fameux scientifique découvre la pénicilline
- Les bactéries ont développé des mécanismes de résistance.
- Les premiers cas d'infections au staphylocoque résistant à la pénicilline ont apparu en 1947
- La résistance bactérienne a été observée dès les premières années d'utilisation de chaque nouvel antibiotique.

Historique

- Durant la première guerre mondiale Alexander Flemming engage des recherches sur la bactérie
- En 1928 le fameux scientifique découvre la pénicilline
- Les bactéries ont développé des mécanismes de résistance.
- Les premiers cas d'infections au staphylocoque résistant à la pénicilline ont apparu en 1947
- La résistance bactérienne a été observée dès les premières années d'utilisation de chaque nouvel antibiotique.

Historique

- Durant la première guerre mondiale Alexander Flemming engage des recherches sur la bactérie
- En 1928 le fameux scientifique découvre la pénicilline
- Les bactéries ont développé des mécanismes de résistance.
- Les premiers cas d'infections au staphylocoque résistant à la pénicilline ont apparu en 1947
- La résistance bactérienne a été observée dès les premières années d'utilisation de chaque nouvel antibiotique.

Historique

- Durant la première guerre mondiale Alexander Flemming engage des recherches sur la bactérie
- En 1928 le fameux scientifique découvre la pénicilline
- Les bactéries ont développé des mécanismes de résistance.
- Les premiers cas d'infections au staphylocoque résistant à la pénicilline ont apparu en 1947
- La résistance bactérienne a été observée dès les premières années d'utilisation de chaque nouvel antibiotique.

Historique

- Durant la première guerre mondiale Alexander Flemming engage des recherches sur la bactérie
- En 1928 le fameux scientifique découvre la pénicilline
- Les bactéries ont développé des mécanismes de résistance.
- Les premiers cas d'infections au staphylocoque résistant à la pénicilline ont apparu en 1947
- La résistance bactérienne a été observée dès les premières années d'utilisation de chaque nouvel antibiotique.

la présence des souches résistantes dans les rivières

- Des souches résistantes sont présentes dans l'eau potable
- Les rivières sont considérées comme une source essentielle de l'eau potable
- L'étude des bactéries résistantes dans les rivières necessite leur dénombrement d'une manière plus précise que la quantification par les méthodes traditionnelles existantes à l'heur actuelle
- La modélisation mathématique permet d'une part d'évaluer le nombre des bactéries dans une rivière

la présence des souches résistantes dans les rivières

- Des souches résistantes sont présentes dans l'eau potable
- Les rivières sont considérées comme une source essentielle de l'eau potable
- L'étude des bactéries résistantes dans les rivières necessite leur dénombrement d'une manière plus précise que la quantification par les méthodes traditionnelles existantes à l'heur actuelle
- La modélisation mathématique permet d'une part d'évaluer le nombre des bactéries dans une rivière

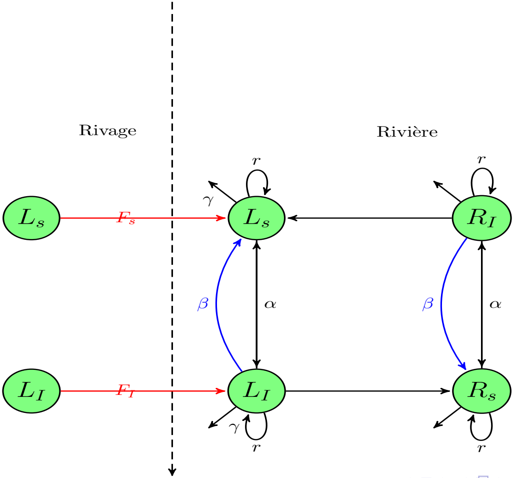
la présence des souches résistantes dans les rivières

- Des souches résistantes sont présentes dans l'eau potable
- Les rivières sont considérées comme une source essentielle de l'eau potable
- L'étude des bactéries résistantes dans les rivières necessite leur dénombrement d'une manière plus précise que la quantification par les méthodes traditionnelles existantes à l'heur actuelle
- La modélisation mathématique permet d'une part d'évaluer le nombre des bactéries dans une rivière

la présence des souches résistantes dans les rivières

- Des souches résistantes sont présentes dans l'eau potable
- Les rivières sont considérées comme une source essentielle de l'eau potable
- L'étude des bactéries résistantes dans les rivières necessite leur dénombrement d'une manière plus précise que la quantification par les méthodes traditionnelles existantes à l'heur actuelle
- La modélisation mathématique permet d'une part d'évaluer le nombre des bactéries dans une rivière

Hypotèses de travail



Hypotèses biologique

- Reproduction et mortalité des bactéries
  - les populations bactériennes suivent une croissance logistique
  - un taux de mortalité supplémentaire des bactéries de la terre
- Transmission et perte du gène de résistance
  - la loi d'action de masse pour modéliser ce contact
  - la fonction $P(L) = \dfrac{\beta}{L+1}$ pour modéliser la perte de gène
- la variabilité spatiale de la résistance des bactéries aux antibiotiques
  - la diffusion et le transport des bactéries dans la rivière
  - le domaine d'étude est de dimension un
- Activités humaines au bord de la rivière modélisées par des termes sources du système.

Hypotèses biologique

- Reproduction et mortalité des bactéries
  - les populations bactériennes suivent une croissance logistique
  - un taux de mortalité supplémentaire des bactéries de la terre
- Transmission et perte du gène de résistance
  - la loi d'action de masse pour modéliser ce contact
  - la fonction $P(L) = \frac{\beta}{L+1}$ pour modéliser la perte de gène
- la variabilité spatiale de la résistance des bactéries aux antibiotiques
  - la diffusion et le transport des bactéries dans la rivière
  - le domaine d'étude est de dimension un
- Activités humaines au bord de la rivière modélisées par des termes sources du système.

Hypotèses biologique

- Reproduction et mortalité des bactéries
  - les populations bactériennes suivent une croissance logistique
  - un taux de mortalité supplémentaire des bactéries de la terre
- Transmission et perte du gène de résistance
  - la loi d'action de masse pour modéliser ce contact
  - la fonction $P(L) = \dfrac{\beta}{L+1}$ pour modéliser la perte de gène
- la variabilité spatiale de la résistance des bactéries aux antibiotiques
  - la diffusion et le transport des bactéries dans la rivière
  - le domaine d'étude est de dimension un
- Activités humaines au bord de la rivière modélisées par des termes sources du système.

Hypotèses biologique

- Reproduction et mortalité des bactéries
  - les populations bactériennes suivent une croissance logistique
  - un taux de mortalité supplémentaire des bactéries de la terre
- Transmission et perte du gène de résistance
  - la loi d'action de masse pour modéliser ce contact
  - la fonction $P(L) = \dfrac{\beta}{L+1}$ pour modéliser la perte de gène
- la variabilité spatiale de la résistance des bactéries aux antibiotiques
  - la diffusion et le transport des bactéries dans la rivière
  - le domaine d'étude est de dimension un
- Activités humaines au bord de la rivière modélisées par des termes sources du système.

Hypotèses biologique

- Reproduction et mortalité des bactéries
  - les populations bactériennes suivent une croissance logistique
  - un taux de mortalité supplémentaire des bactéries de la terre
- Transmission et perte du gène de résistance
  - la loi d'action de masse pour modéliser ce contact
  - la fonction $P(L) = \dfrac{\beta}{L+1}$ pour modéliser la perte de gène
- la variabilité spatiale de la résistance des bactéries aux antibiotiques
  - la diffusion et le transport des bactéries dans la rivière
  - le domaine d'étude est de dimension un
- Activités humaines au bord de la rivière modélisées par des termes sources du système.

Le modèle (CDI)

$$\frac{\partial R_s}{\partial t} = BR_s - \alpha R_s(R_l + L_l) + \frac{\beta R_l}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_s$$

$$\frac{\partial R_l}{\partial t} = BR_l + \alpha R_s(R_l + L_l) - \frac{\beta R_l}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_l$$

$$\frac{\partial L_s}{\partial t} = BL_s + F_s - \gamma L_s - \alpha L_s(R_l + L_l) + \frac{\beta L_l}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_s$$

$$\frac{\partial L_l}{\partial t} = BL_l + F_l - \gamma L_l + \alpha L_s(R_l + L_l) - \frac{\beta L_l}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_l,$$

$t > 0$, $x \in (0, +\infty)$, B est l'opérateur $B = d\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x}$

Le modèle (CDI)

$$\frac{\partial R_s}{\partial t} = BR_s - \alpha R_s(R_I + L_I) + \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_s$$

$$\frac{\partial R_I}{\partial t} = BR_I + \alpha R_s(R_I + L_I) - \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_I$$

$$\frac{\partial L_s}{\partial t} = BL_s + F_s - \gamma L_s - \alpha L_s(R_I + L_I) + \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_s$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial t} = BL_I + F_I - \gamma L_I + \alpha L_s(R_I + L_I) - \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_I,$$

$t > 0, \quad x \in (0, +\infty)$, B est l'opérateur $B = d\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x}$

Le modèle (CDI)

$$\frac{\partial R_s}{\partial t} = BR_s - \alpha R_s(R_I + L_I) + \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_s$$

$$\frac{\partial R_I}{\partial t} = BR_I + \alpha R_s(R_I + L_I) - \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_I$$

$$\frac{\partial L_s}{\partial t} = BL_s + F_s - \gamma L_s - \alpha L_s(R_I + L_I) + \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_s$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial t} = BL_I + F_I - \gamma L_I + \alpha L_s(R_I + L_I) - \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_I,$$

$t > 0, \quad x \in (0, +\infty)$, B est l'opérateur $B = d\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial x}$

Le modèle (CDI)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R_s}{\partial t} &= BR_s - \alpha R_s(R_I + L_I) + \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_s \\
\frac{\partial R_I}{\partial t} &= BR_I + \alpha R_s(R_I + L_I) - \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_I \\
\frac{\partial L_s}{\partial t} &= BL_s + F_s - \gamma L_s - \alpha L_s(R_I + L_I) + \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_s \\
\frac{\partial L_I}{\partial t} &= BL_I + F_I - \gamma L_I + \alpha L_s(R_I + L_I) - \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_I,
\end{aligned}
$$

$t > 0, \quad x \in (0, +\infty)$, B est l'opérateur $B = d\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - b\dfrac{\partial}{\partial x}$

Le modèle (CDI)

A l'instant initial les concentrations des bactéries sont données, nous posons donc

$$R_s(x,0) = u_0(x), \; R_I(x,0) = v_0(x),$$

$$L_s(x,0) = w_0(x), \; L_I(x,0) = z_0(x),$$

pour $x \in [0, +\infty)$; les fonctions u_0, v_0, w_0 et z_0 sont positives dans

$$L^1(0, +\infty) \cap L^\infty(0, +\infty).$$

Le modèle (CDI)

A l'instant initial les concentrations des bactéries sont données, nous posons donc

$$R_s(x,0) = u_0(x),\ R_I(x,0) = v_0(x),$$

$$L_s(x,0) = w_0(x),\ L_I(x,0) = z_0(x),$$

pour $x \in [0,+\infty)$; les fonctions u_0, v_0, w_0 et z_0 sont positives dans

$$L^1(0,+\infty) \cap L^\infty(0,+\infty).$$

Le modèle (CDI)

De plus, on spécifie les conditions aux limites de notre intervalle d'étude :

$$\frac{\partial R_s}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial R_l}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial L_s}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial L_l}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\frac{\partial R_s}{\partial x}(+\infty,t) = \frac{\partial R_l}{\partial x}(+\infty,t) = \frac{\partial L_s}{\partial x}(+\infty,t) = \frac{\partial L_l}{\partial x}(+\infty,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

- Les conditions aux limites sont de type Neumann car les espèces bactériennes restent dans la rivière (absence d'immigration).

Le modèle (CDI)

De plus, on spécifie les conditions aux limites de notre intervalle d'étude :

$$\frac{\partial R_s}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial R_l}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial L_s}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial L_l}{\partial x}(0,t) = 0, \;\; t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\frac{\partial R_s}{\partial x}(+\infty,t) = \frac{\partial R_l}{\partial x}(+\infty,t) = \frac{\partial L_s}{\partial x}(+\infty,t) = \frac{\partial L_l}{\partial x}(+\infty,t) = 0, \;\; t \in \mathbb{R}_+.$$

- Les conditions aux limites sont de type Neumann car les espèces bactériennes restent dans la rivière (absence d'immigration).

Conditions sur F_s et F_l

- F_s et F_l sont des fonctions positives dans $C\left(\mathbb{R}_+, L^1(0,+\infty)\right)$ qui représentent les taux des bactéries provenant de la terre par le rivage.
- Ces taux ne sont pas constants ils dépendent du temps et de l'espace; $F_s \leq a_1$ et $F_l \leq a_2$, pour a_1 et a_2 des nombres réels.
- Il existe f_s et f_l des fonctions continues positives dans $L^1(0,+\infty)$ satisfont $f_s \leq a_1$ et $f_l \leq a_2$, telles que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(F_s(x,t)-f_s(x)\right)^2dx=0, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(F_l(x,t)-f_l(x)\right)^2dx=0; \tag{6}$$

Conditions sur F_s et F_l

- F_s et F_l sont des fonctions positives dans $C\left(\mathbb{R}_+, L^1(0,+\infty)\right)$ qui représentent les taux des bactéries provenant de la terre par le rivage.
- Ces taux ne sont pas constants ils dépendent du temps et de l'espace; $F_s \le a_1$ et $F_l \le a_2$, pour a_1 et a_2 des nombres réels.
- Il existe f_s et f_l des fonctions continues positives dans $L^1(0,+\infty)$ satisfont $f_s \le a_1$ et $f_l \le a_2$, telles que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}(F_s(x,t)-f_s(x))^2\,dx=0, \quad (5)$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}(F_l(x,t)-f_l(x))^2\,dx=0; \quad (6)$$

Conditions sur F_s et F_l

- F_s et F_l sont des fonctions positives dans $C\left(\mathbb{R}_+, L^1(0,+\infty)\right)$ qui représentent les taux des bactéries provenant de la terre par le rivage.
- Ces taux ne sont pas constants ils dépendent du temps et de l'espace; $F_s \leq a_1$ et $F_l \leq a_2$, pour a_1 et a_2 des nombres réels.
- Il existe f_s et f_l des fonctions continues positives dans $L^1(0,+\infty)$ satisfont $f_s \leq a_1$ et $f_l \leq a_2$, telles que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} (F_s(x,t) - f_s(x))^2 \, dx = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} (F_l(x,t) - f_l(x))^2 \, dx = 0; \tag{6}$$

Conditions sur F_s et F_l

- F_s et F_l sont des fonctions positives dans $C\left(\mathbb{R}_+, L^1(0,+\infty)\right)$ qui représentent les taux des bactéries provenant de la terre par le rivage.
- Ces taux ne sont pas constants ils dépendent du temps et de l'espace; $F_s \leq a_1$ et $F_l \leq a_2$, pour a_1 et a_2 des nombres réels.
- Il existe f_s et f_l des fonctions continues positives dans $L^1(0,+\infty)$ satisfont $f_s \leq a_1$ et $f_l \leq a_2$, telles que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(F_s(x,t) - f_s(x)\right)^2 dx = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(F_l(x,t) - f_l(x)\right)^2 dx = 0; \tag{6}$$

Plan de l'exposé

Existence locale

- Soit $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ le seconde membre de (CDI) et $X = (L^\infty(0, +\infty))^4$.
- Grâce à la théorie standard d'existence de solutions de **Amann 1997**, il existe une solution unique locale $(R_s(t,.), R_I(t,.)L_s(t,.)L_s(t,.))$ du système (CDI) sous la condition $0 \leq t \leq T_{max}$, où T_{max} dépend de u_0, v_0, w_0 et v_0.
- Si $T_{max} < +\infty$ alors

$$\lim_{t \to T_{max}} \sup_{x \in [0,+\infty)} \{|u(x,t)| + |v(x,t)| + |w(x,t)| + |z(x,t)|\} = +\infty.$$

Existence globale

- On va monter l'existence globale des solutions de (CDI) en établissant l'existence d'un ensemble invariant
- on ne s'interesse qu'à la dynamique dans la région $R_s \geq 0$, $R_I \geq 0$, $L_s \geq 0$, $L_I \geq 0$, qui correspond aux solutions biologiquement significatives.

Théorème : ensemble invariant

L'ensemble

$$\Sigma = \left\{ u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, z \geq 0 : u + v \leq K, w + z \leq \frac{a_1 + a_2}{\gamma - r} \right\}$$

est une région positivement invariante pour le système (CDI).

Existence globale

- On va monter l'existence globale des solutions de (CDI) en établissant l'existence d'un ensemble invariant
- on ne s'interesse qu'à la dynamique dans la région $R_s \geq 0$, $R_l \geq 0$, $L_s \geq 0$, $L_l \geq 0$, qui correspond aux solutions biologiquement significatives.

Théorème : ensemble invariant

L'ensemble

$$\Sigma = \left\{ u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, z \geq 0 : u + v \leq K, w + z \leq \frac{a_1 + a_2}{\gamma - r} \right\}$$

est une région positivement invariante pour le système (CDI).

Plan de l'exposé

L'ensemble limite

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ le semi groupe associé au système (CDI)

Définition : Trajectoire Soit $x \in X$, alors la courbe $t \mapsto S(t)x$ est appelée la **trajectoire** de x.

Définition : Ensemble limite Soit $x \in X$, l'ensemble

$$\omega(x) = \{y \in X; \exists t_n \to +\infty,\ S(t_n)x \to y, \text{ quand } n \to +\infty$$

est dit **ensemble limite** de x.

L'ensemble limite

Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ le semi groupe associé au système (CDI)

Définition : Trajectoire Soit $x \in X$, alors la courbe $t \mapsto S(t)x$ est appelée la **trajectoire** de x.

Définition : Ensemble limite Soit $x \in X$, l'ensemble

$$\omega(x) = \{y \in X; \exists t_n \to +\infty,\ S(t_n)x \to y,\ \text{quand } n \to +\infty$$

est dit **ensemble limite** de x.

L'ensemble limite

Dans la suite, on note par $\omega(U_0)$ l'ensemble limite de $U_0 = (u_0, v_0, w_0, z_0)$ et Λ l'ensemble des solutions du système elliptique (CDI)$_e$

$$
\begin{aligned}
-BR_s &= -\alpha R_s(R_I + L_I) + \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_s \\
-BR_I &= BR_I + \alpha R_s(R_I + L_I) - \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_I \\
-BL_s &= f_s(x) - \gamma L_s - \alpha L_s(R_I + L_I) + \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_s \\
-BL_I &= f_I(x) - \gamma L_I + \alpha L_s(R_I + L_I) - \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_I,
\end{aligned}
$$

L'ensemble limite

Dans la suite, on note par $\omega(U_0)$ l'ensemble limite de $U_0 = (u_0, v_0, w_0, z_0)$ et Λ l'ensemble des solutions du système elliptique (CDI)$_e$

$$
\begin{aligned}
-BR_s &= -\alpha R_s(R_I + L_I) + \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_s \\
-BR_I &= BR_I + \alpha R_s(R_I + L_I) - \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_I \\
-BL_s &= f_s(x) - \gamma L_s - \alpha L_s(R_I + L_I) + \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_s \\
-BL_I &= f_I(x) - \gamma L_I + \alpha L_s(R_I + L_I) - \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_I,
\end{aligned}
$$

L'ensemble limite

Dans la suite, on note par $\omega(U_0)$ l'ensemble limite de $U_0 = (u_0, v_0, w_0, z_0)$ et Λ l'ensemble des solutions du système elliptique $(\mathrm{CDI})_e$

$$
\begin{aligned}
-BR_s &= -\alpha R_s(R_I + L_I) + \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_s \\
-BR_I &= BR_I + \alpha R_s(R_I + L_I) - \frac{\beta R_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_I \\
-BL_s &= f_s(x) - \gamma L_s - \alpha L_s(R_I + L_I) + \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_s \\
-BL_I &= f_I(x) - \gamma L_I + \alpha L_s(R_I + L_I) - \frac{\beta L_I}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_I,
\end{aligned}
$$

L'ensemble limite

Dans la suite, on note par $\omega(U_0)$ l'ensemble limite de $U_0 = (u_0, v_0, w_0, z_0)$ et Λ l'ensemble des solutions du système elliptique (CDI)$_e$

$$\begin{aligned}
-BR_s &= -\alpha R_s(R_l + L_l) + \frac{\beta R_l}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_s \\
-BR_l &= BR_l + \alpha R_s(R_l + L_l) - \frac{\beta R_l}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) R_l \\
-BL_s &= f_s(x) - \gamma L_s - \alpha L_s(R_l + L_l) + \frac{\beta L_l}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_s \\
-BL_l &= f_l(x) - \gamma L_l + \alpha L_s(R_l + L_l) - \frac{\beta L_l}{L+1} + r\left(1 - \frac{\omega}{K}\right) L_l,
\end{aligned}$$

L'ensemble limite

avec les conditions limites:

$$u'(0) = u'(+\infty) = 0, \ v'(0) = v'(+\infty) = 0, \tag{7}$$

$$w'(0) = w'(+\infty) = 0, \ w'(0) = w'(+\infty) = 0. \tag{8}$$

Théorème : Ensemble limite

L'ensemble limite ω du système (CDI) est un sous ensemble de Λ

Solutions du problème elliptique

- Existence dans $(0, a)$, ensuite dans $(0, +\infty)$.

Théorème de Leray-Schauder

Supposons que X est un espace de Banach, Ω un ouvert borné dans X et $\phi : [\kappa, \tilde{\kappa}] \times \bar{\Omega} \to X$ est donnée par $\phi(\tau, u) = u - T(\tau, u)$, avec T une application compacte. Supposons en plus que

$$\phi(\tau, u) = u - T(\tau, u) \neq 0 \quad (\tau, u) \in [\kappa, \tilde{\kappa}] \times \partial\Omega.$$

Si

$$deg(\phi_\kappa, \Omega, 0) \neq 0,$$

alors $u - T(\tau, u) = 0$ admet une solution dans Ω pour tout $\kappa \leq \tau \leq \tilde{\kappa}$.

Solutions du problème elliptique

Théorème d'existence

Supposons que les conditions

$$2\beta < \alpha^2 K(K/2 + 1)$$

et

$$\alpha < \frac{\beta}{r(K/2+1)+\beta} < 1,$$

sont vérifiées pour un $a > 0$ fixé, alors il existe une solution positive $U = (u, v, w, z) \in \left(H^2(0, +\infty)\right)^4$ du système elliptique.

Perspectives

- Une vitesse non constante
- Dynamique et distribution des poissons infectés par des bactéries résistantes aux antibiotiques dans un bassin d'élevage

For Further Reading I

H. Amann.
Dynamics theory of quasilinear parabolic equations-I. Abstract evolution equations, Nonlinear Anal, 1997.

J. Leray, J. Schauder
Topologie et équations fonctionnelles, Annales Scientifiques de l'E. N. S, 1934