

Théorème d'existence pour Navier-Stokes incompressible à densité variable avec rhéologie dépendant d'un paramètre

Jordane MATHÉ

avec Laurent CHUPIN (maths), Karim KELFOUN et Olivier ROCHE
(LMV)

Laboratoire de Maths et Laboratoire Magmas et Volcans

23 Mai 2014

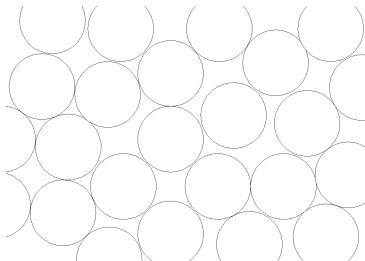


Expériences : Écoulement non fluidisé

O. ROCHE, LMV.

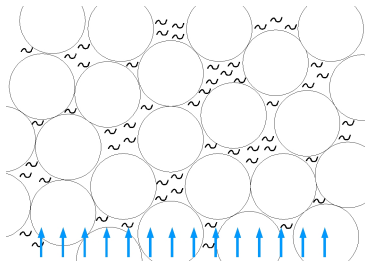
Expériences : Écoulement fluidisé

- Fluidisation : Injection de **gaz** dans la colonne granulaire.



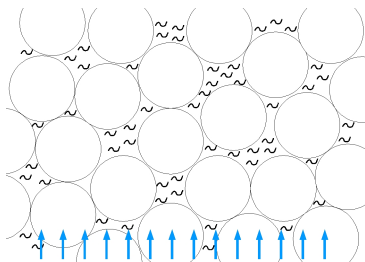
Expériences : Écoulement fluidisé

- Fluidisation : Injection de **gaz** dans la colonne granulaire.



Expériences : Écoulement fluidisé

- Fluidisation : Injection de **gaz** dans la colonne granulaire.



O. ROCHE, LMV.



FIGURE: Écoulement non fluidisé : **courte** distance de parcours



FIGURE: Écoulement fluidisé : **longue** distance de parcours

1 Modèle complet

- Modélisation
- Théorème d'existence

2 Le cas à densité constante.

- Définition d'une solution faible
- Preuve : cas à densité constante

1 Modèle complet

- Modélisation
- Théorème d'existence

2 Le cas à densité constante.

- Définition d'une solution faible
- Preuve : cas à densité constante

Deux phases mais un seul fluide

Pour simplifier, on considère **un seul fluide-mélange à densité variable**.

Deux phases mais un seul fluide

Pour simplifier, on considère **un seul fluide-mélange à densité variable**.
Il vérifie les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{g} + \operatorname{div}(\mathbf{S}) \end{cases} \quad (1)$$

Deux phases mais un seul fluide

Pour simplifier, on considère **un seul fluide-mélange à densité variable**.
Il vérifie les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{g} + \operatorname{div}(\mathbf{S}) \end{cases} \quad (1)$$

Inconnues :

- \boldsymbol{v} : vitesse du mélange,
- p : pression du mélange,
- ρ : densité du mélange.

Deux phases mais un seul fluide

Pour simplifier, on considère **un seul fluide-mélange à densité variable**.
Il vérifie les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{g} + \operatorname{div}(\mathbf{S}) \end{cases} \quad (1)$$

Constante

- \boldsymbol{g} : pesanteur.

Deux phases mais un seul fluide

Pour simplifier, on considère **un seul fluide-mélange à densité variable**.
Il vérifie les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ \partial_t(\rho \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{g} + \operatorname{div}(\mathbf{S}) \end{cases} \quad (1)$$

Constante

- \boldsymbol{g} : pesanteur.

Rhéologie

Il reste à préciser \mathbf{S} .

Rhéologie

Dans mon cas :

$$\mathbf{S} = \mu Dv + \Sigma,$$

Rhéologie

Dans mon cas :

$$\mathbf{S} = \mu D\mathbf{v} + \Sigma,$$

où

$D\mathbf{v} = \dot{\gamma}$ est le taux de déformation,

μ est la viscosité effective,

Rhéologie

Dans mon cas :

$$\mathbf{S} = \mu D\mathbf{v} + \Sigma,$$

où

$D\mathbf{v} = \dot{\gamma}$ est le taux de déformation,

μ est la viscosité effective,

$$\Sigma = q \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|}$$

Rhéologie

Dans mon cas :

$$\mathbf{S} = \mu D\mathbf{v} + \Sigma,$$

où

$D\mathbf{v} = \dot{\gamma}$ est le taux de déformation,

μ est la viscosité effective,

$$\Sigma = q \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|}$$

⇒ Fluide de Bingham à seuil q

Rhéologie

Dans mon cas :

$$\mathbf{S} = \mu D\mathbf{v} + \Sigma,$$

où

$D\mathbf{v} = \dot{\gamma}$ est le taux de déformation,

μ est la viscosité effective,

$$\Sigma = q \frac{D\mathbf{v}}{|D\mathbf{v}|}$$

⇒ Fluide de Bingham à seuil q

Idée

Faire varier le seuil q en fonction de la **pression du gaz** interstitiel.

Variation du seuil

Définition du seuil

$$q = \begin{cases} \text{Pas de gaz :} & \text{Frottement de Coulomb} \\ \text{Avec gaz :} & \text{fluide} \end{cases}$$

Variation du seuil

Définition du seuil

$$q = \begin{cases} \text{Pas de gaz :} & \text{Frottement de Coulomb} \\ \text{Avec gaz :} & \text{fluide} \end{cases}$$
$$q = \begin{cases} \rho gh - \text{pression du gaz} & \text{si pression fluide } \mathbf{faible} \\ 0 & \text{si pression fluide } \mathbf{forte} \end{cases}$$

$\rho gh = p_s$ est la **pression solide**.

Variation du seuil

Définition du seuil

$$\begin{aligned} q &= \begin{cases} \text{Pas de gaz :} & \text{Frottement de Coulomb} \\ \text{Avec gaz :} & \text{fluide} \end{cases} \\ q &= \begin{cases} \rho gh - \text{pression du gaz} & \text{si pression fluide } \mathbf{faible} \\ 0 & \text{si pression fluide } \mathbf{forte} \end{cases} \\ q &= (\rho gh - \text{pression du gaz})^+ \end{aligned}$$

$\rho gh = p_s$ est la **pression solide**.

Modèle

Si on note p_f la pression du gaz interstitiel, alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(v) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \mu \Delta v + \nabla p = \rho g + \operatorname{div}\left(\underbrace{(\rho g h - p_f)^+}_{\text{seuil } q} \frac{Dv}{|Dv|}\right) \end{cases} \quad (2)$$

Modèle

Si on note p_f la pression du gaz interstitiel, alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(v) = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \mu \Delta v + \nabla p = \rho g + \operatorname{div}\left(\underbrace{(\rho g h - p_f)^+}_{\text{seuil } q} \frac{Dv}{|Dv|}\right) \\ \partial_t p_f + v \cdot \nabla p_f - K \Delta p_f = 0 \end{cases} \quad (2)$$

1 Modèle complet

- Modélisation
- Théorème d'existence

2 Le cas à densité constante.

- Définition d'une solution faible
- Preuve : cas à densité constante

Existence d'une solution faible

Théorème

Si $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ satisfait $0 < M^{-1} \leq \rho_0 \leq M$, si $p_{f_0} \in L^\infty(\Omega)$ est positive, $v_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+; V')$ et si p_s est une fonction compacte de la densité,

Alors pour tout $T > 0$, il existe une solution faible sur $\Omega \times (0, T)$.

1 Modèle complet

- Modélisation
- Théorème d'existence

2 Le cas à densité constante.

- Définition d'une solution faible
- Preuve : cas à densité constante

Un cas plus simple : densité constante.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(v) = 0 \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v - \Delta v = f - \nabla p + \operatorname{div}(\Sigma) \\ \partial_t q + v \cdot \nabla q - \Delta q = 0 \\ (\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q], \end{array} \right. \quad (3)$$

Un cas plus simple : densité constante.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(v) = 0 \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v - \Delta v = f - \nabla p + \operatorname{div}(\Sigma) \\ \partial_t q + v \cdot \nabla q - \Delta q = 0 \\ (\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q], \end{array} \right. \quad (3)$$

où

$$(\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \Sigma = q \frac{Dv}{|Dv|} & \text{si } Dv \neq 0 \\ |\Sigma| \leq |q| & \text{si } Dv = 0 \end{array} \right.$$

Un cas plus simple : densité constante.

$$\begin{cases} \operatorname{div}(v) = 0 \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v - \Delta v = f - \nabla p + \operatorname{div}(\Sigma) \\ \partial_t q + v \cdot \nabla q - \Delta q = 0 \\ (\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q], \end{cases} \quad (3)$$

où

$$(\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q] \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma = q \frac{Dv}{|Dv|} & \text{si } Dv \neq 0 \\ |\Sigma| \leq |q| & \text{si } Dv = 0 \end{cases}$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} \Sigma : Dv = q |Dv| \\ |\Sigma| \leq |q| \end{cases}$$

Formulation variationnelle

Définition

On dit que $(\Sigma, q, v) \in L^\infty L^2 \times (L^\infty L^2 \cap L^2 H^1) \times (L^\infty H \cap L^2 V)$ est solution faible de (3) sur $\Omega \times (0, T)$ si $\forall (r, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times V$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \partial_t v \cdot \psi + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla v) \cdot \psi + \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \psi + \int_{\Omega} \Sigma : \nabla \psi = \langle f, \psi \rangle_{V', V} \\ \int_{\Omega} \partial_t q r + \int_{\Omega} v \cdot \nabla q r + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla r = 0 \\ (\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q] \\ v|_{t=0} = v_0 \\ q|_{t=0} = q_0 \end{array} \right. \quad (4)$$

où

$$(\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Sigma : Dv = q |Dv| \\ |\Sigma| \leq |q| \end{array} \right. .$$

1 Modèle complet

- Modélisation
- Théorème d'existence

2 Le cas à densité constante.

- Définition d'une solution faible
- Preuve : cas à densité constante

Preuve : $1/3$ - Schéma d'Approximation

On procède à deux approximations successives :

Preuve : 1/3 - Schéma d'Approximation

On procède à deux approximations successives :

Première approximation :

$$\Sigma = q \frac{Dv}{|Dv|} \rightsquigarrow \Sigma_n := q \frac{Dv}{|Dv| + 1/n}.$$

Deuxième approximation : Galerkin

Soient $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de V et $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de $H_0^1(\Omega)$.

Deuxième approximation : Galerkin

Soient $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de V et $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de $H_0^1(\Omega)$.

On cherche $(\Sigma_n^k, q_n^k, v_n^k) \in L^\infty L_k^2 \times (L^\infty L_k^2 \cap L^2 H_k^1) \times (L^\infty H_k \cap L^2 V_k)$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, k\}$

Deuxième approximation : Galerkin

Soient $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de V et $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de $H_0^1(\Omega)$.

On cherche $(\Sigma_n^k, q_n^k, v_n^k) \in L^\infty L_k^2 \times (L^\infty L_k^2 \cap L^2 H_k^1) \times (L^\infty H_k \cap L^2 V_k)$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, k\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\partial_t v_n^k + v_n^k \cdot \nabla v_n^k) \cdot w_i + \int_{\Omega} \nabla v_n^k : \nabla w_i + \int_{\Omega} \Sigma_n^k : \nabla w_i = \langle f, w_i \rangle_{V', V} \\ \int_{\Omega} (\partial_t q_n^k + v_n^k \cdot \nabla q_n^k) r_i + \int_{\Omega} \nabla q_n^k \cdot \nabla r_i = 0 \\ (\Sigma_n^k, Dv_n^k) \in \mathcal{G}_n^k \\ v_n^k|_{t=0} = v_0^k \\ q_n^k|_{t=0} = q_0^k \end{array} \right. \quad (5)$$

où $(\Sigma_n^k, Dv_n^k) \in \mathcal{G}_n^k \Leftrightarrow \Sigma_n^k = q_n^k \frac{Dv_n^k}{|Dv_n^k| + \frac{1}{n}}$.

Deuxième approximation : Galerkin

Soient $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de V et $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de $H_0^1(\Omega)$.

On cherche $(\Sigma_n^k, q_n^k, v_n^k) \in L^\infty L_k^2 \times (L^\infty L_k^2 \cap L^2 H_k^1) \times (L^\infty H_k \cap L^2 V_k)$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, k\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\partial_t v_n^k + v_n^k \cdot \nabla v_n^k) \cdot w_i + \int_{\Omega} \nabla v_n^k : \nabla w_i + \int_{\Omega} \Sigma_n^k : \nabla w_i = \langle f, w_i \rangle_{V', V} \\ \int_{\Omega} (\partial_t q_n^k + v_n^k \cdot \nabla q_n^k) r_i + \int_{\Omega} \nabla q_n^k \cdot \nabla r_i = 0 \\ (\Sigma_n^k, Dv_n^k) \in \mathcal{G}_n^k \\ v_n^k|_{t=0} = v_0^k \\ q_n^k|_{t=0} = q_0^k \end{array} \right. \quad (5)$$

où $(\Sigma_n^k, Dv_n^k) \in \mathcal{G}_n^k \Leftrightarrow \Sigma_n^k = q_n^k \frac{Dv_n^k}{|Dv_n^k| + \frac{1}{n}}$.

→ C'est explicite !

Preuve : 2/3 - Estimations d'énergie et limites

Des estimations d'énergie classiques permettent d'avoir successivement

$$(\Sigma_n^k, q_n^k, v_n^k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\Sigma^k, q^k, v^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\Sigma, q, v)$$

Preuve : 2/3 - Estimations d'énergie et limites

Des estimations d'énergie classiques permettent d'avoir successivement

$$(\Sigma_n^k, q_n^k, v_n^k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\Sigma^k, q^k, v^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\Sigma, q, v)$$

Ensuite, on veut vérifier que (Σ, q, v) est solution faible, i.e. $\forall \psi, r$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \partial_t v \cdot \psi + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla v) \cdot \psi + \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \psi + \int_{\Omega} \Sigma : \nabla \psi = \langle f, \psi \rangle_{V', V} \\ \int_{\Omega} \partial_t q r + \int_{\Omega} v \cdot \nabla q r + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla r = 0 \\ (\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q] \\ v|_{t=0} = v_0 \\ q|_{t=0} = q_0 \end{array} \right.$$

où

$$(\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Sigma : Dv = q |Dv| \\ |\Sigma| \leq |q| \end{array} \right. .$$

Preuve : 2/3 - Estimations d'énergie et limites

Des estimations d'énergie classiques permettent d'avoir successivement

$$(\Sigma_n^k, q_n^k, v_n^k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (\Sigma^k, q^k, v^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (\Sigma, q, v)$$

Ensuite, on veut vérifier que (Σ, q, v) est solution faible, i.e. $\forall \psi, r$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \partial_t v \cdot \psi + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla v) \cdot \psi + \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \psi + \int_{\Omega} \Sigma : \nabla \psi = \langle f, \psi \rangle_{V', V} \\ \int_{\Omega} \partial_t q r + \int_{\Omega} v \cdot \nabla q r + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla r = 0 \\ (\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q] \\ v|_{t=0} = v_0 \\ q|_{t=0} = q_0 \end{array} \right.$$

où

$$(\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q] \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma : Dv = q |Dv| \\ |\Sigma| \leq |q| \end{cases} .$$

Preuve : 3/3 - Passage à la limite dans le graphe

On veut montrer que le triplet (Σ, q, ν) vérifie :

$$\begin{cases} \Sigma : D\nu & = & q|D\nu| \\ |\Sigma| & \leq & |q|. \end{cases}$$

Preuve : 3/3 - Passage à la limite dans le graphe

On veut montrer que le triplet (Σ, q, ν) vérifie :

$$\begin{cases} \Sigma : D\nu & = & q|D\nu| \\ |\Sigma| & \leq & |q|. \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 0$,

$$|\Sigma^k| \leq |q^k| \leq |q_0|_{L^\infty} \text{ p.p.}$$

Preuve : 3/3 - Passage à la limite dans le graphe

On veut montrer que le triplet (Σ, q, ν) vérifie :

$$\begin{cases} \Sigma : D\nu & = & q|D\nu| \\ |\Sigma| & \leq & |q|. \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 0$,

$$|\Sigma^k| \leq |q^k| \leq |q_0|_{L^\infty} \text{ p.p.}$$

Donc **pour tout** $\omega \subset \Omega \times (0, T)$ de mesure non nulle, on a

$$\|\Sigma\|_{L^1(\omega)} \leq \|q\|_{L^1(\omega)}.$$

Preuve : 3/3 - Passage à la limite dans le graphe

On veut montrer que le triplet (Σ, q, ν) vérifie :

$$\begin{cases} \Sigma : D\nu &= q|D\nu| \\ |\Sigma| &\leq |q|. \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 0$,

$$|\Sigma^k| \leq |q^k| \leq |q_0|_{L^\infty} \text{ p.p.}$$

Donc **pour tout** $\omega \subset \Omega \times (0, T)$ de mesure non nulle, on a

$$\|\Sigma\|_{L^1(\omega)} \leq \|q\|_{L^1(\omega)}.$$

Donc on a le résultat :

$$|\Sigma| \leq |q| \text{ p.p.}$$

Preuve : 3/3 - Passage à la limite dans le graphe

On veut montrer que le triplet (Σ, q, ν) vérifie :

$$\begin{cases} \Sigma : D\nu & = & q|D\nu| \\ |\Sigma| & \leq & |q|. \end{cases}$$

Ingrédients :

- $\Sigma^k : D\nu^k$ converge vers $q|D\nu|$ dans L^1 -faible.
- Σ^k converge vers Σ dans L^2 -faible.
- $D\nu^k$ converge vers $D\nu$ dans L^2 -faible.

C'est insuffisant.

Pour conclure, on démontre que

$$\Sigma^k : D\nu^k \rightarrow \Sigma : D\nu \in L^1.$$

Preuve : 3/3 - Passage à la limite dans le graphe

On veut montrer que le triplet (Σ, q, ν) vérifie :

$$\begin{cases} \Sigma : D\nu & = & q|D\nu| \\ |\Sigma| & \leq & |q|. \end{cases}$$

Les étapes de la démonstration sont :

(a) Montrer que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : D\nu^k \leq \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma : D\nu.$$

Preuve : 3/3 - Passage à la limite dans le graphe

On veut montrer que le triplet (Σ, q, ν) vérifie :

$$\begin{cases} \Sigma : D\nu & = & q|D\nu| \\ |\Sigma| & \leq & |q|. \end{cases}$$

Les étapes de la démonstration sont :

(a) Montrer que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : D\nu^k \leq \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma : D\nu.$$

(b) Montrer l'existence d'une sélection Σ^* du graphe $\mathcal{G}[q^k]$.

Preuve : 3/3 - Passage à la limite dans le graphe

On veut montrer que le triplet (Σ, q, ν) vérifie :

$$\begin{cases} \Sigma : D\nu & = & q|D\nu| \\ |\Sigma| & \leq & |q|. \end{cases}$$

Les étapes de la démonstration sont :

(a) Montrer que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : D\nu^k \leq \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma : D\nu.$$

(b) Montrer l'existence d'une sélection Σ^* du graphe $\mathcal{G}[q^k]$.

(c) Estimer la quantité

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\Sigma^k - \Sigma^*(q^k, D\nu)) : (D\nu^k - D\nu).$$

(a)-Une première estimation.

On prend v^k comme fonctions-test :

$$\frac{1}{2}d_t|v^k|_{L^2}^2 + |\nabla v^k|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k = \langle f, v^k \rangle .$$

(a)-Une première estimation.

On prend v^k comme fonctions-test :

$$\frac{1}{2}d_t|v^k|_{L^2}^2 + |\nabla v^k|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k = \langle f, v^k \rangle .$$

On intègre en temps :

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k = |v_0^k|_{L^2}^2 - |v^k(t)|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f, v^k \rangle - \int_0^t |\nabla v^k|_{L^2}^2$$

(a)-Une première estimation.

On prend v^k comme fonctions-test :

$$\frac{1}{2}d_t|v^k|_{L^2}^2 + |\nabla v^k|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k = \langle f, v^k \rangle .$$

On intègre en temps :

$$\begin{array}{ccccccc} \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k & = & |v_0^k|_{L^2}^2 & - & |v^k(t)|_{L^2}^2 & + & \int_0^t \langle f, v^k \rangle & - & \int_0^t |\nabla v^k|_{L^2}^2 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{ faible} \\ \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma : Dv & = & |v_0|_{L^2}^2 & - & |v(t)|_{L^2}^2 & + & \int_0^t \langle f, v \rangle & - & \int_0^t |\nabla v|_{L^2}^2 \end{array}$$

(a)-Une première estimation.

On prend v^k comme fonctions-test :

$$\frac{1}{2} d_t |v^k|_{L^2}^2 + |\nabla v^k|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k = \langle f, v^k \rangle .$$

On intègre en temps :

$$\begin{array}{ccccccc} \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k & = & |v_0^k|_{L^2}^2 & - & |v^k(t)|_{L^2}^2 & + & \int_0^t \langle f, v^k \rangle & - & \int_0^t |\nabla v^k|_{L^2}^2 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{ faible} \\ \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma : Dv & = & |v_0|_{L^2}^2 & - & |v(t)|_{L^2}^2 & + & \int_0^t \langle f, v \rangle & - & \int_0^t |\nabla v|_{L^2}^2 \end{array}$$

Donc en passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, on a

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k \leq \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma : Dv .$$

(b)-Existence d'une sélection du graphe $\mathcal{G}[q^k]$.

Lemme

Il existe $\Sigma^*(q^k, Dv)$ telle que

$$\begin{cases} \Sigma^* : Dv = q^k |Dv| \\ |\Sigma^*| \leq |q^k| \end{cases}$$

(b)-Existence d'une sélection du graphe $\mathcal{G}[q^k]$.

Lemme

Il existe $\Sigma^*(q^k, Dv)$ telle que

$$\begin{cases} \Sigma^* : Dv = q^k |Dv| \\ |\Sigma^*| \leq |q^k| \end{cases}$$

Démonstration.

En fait, on la construit explicitement par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ à partir de la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times S_d(\mathbb{R}) &\rightarrow S_d(\mathbb{R}) \\ (q, D) &\mapsto \begin{cases} q \frac{D}{|D|} & \text{si } D \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$



(c)-Étudier $\int \int (\Sigma^k - \Sigma^*(q^k, Dv)) : (Dv^k - Dv)$.

- En développant et en passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} (\Sigma^k - \Sigma^*(q^k, Dv)) : (Dv^k - Dv) \\ = \limsup_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k - \Sigma : Dv}_{\text{d'après (a)}} \leq 0. \end{aligned}$$

(c)-Étudier $\int \int (\Sigma^k - \Sigma^*(q^k, Dv)) : (Dv^k - Dv)$.

- En développant et en passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} (\Sigma^k - \Sigma^*(q^k, Dv)) : (Dv^k - Dv) \\ = \limsup_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k - \Sigma : Dv}_{\text{d'après (a)}} \leq 0. \end{aligned}$$

- Mais d'autre part, grâce à Cauchy-Schwarz,

$$(\Sigma^k - \Sigma^*(q^k, Dv)) : (Dv^k - Dv) \geq 0.$$

(c)-Étudier $\int \int (\Sigma^k - \Sigma^*(q^k, Dv)) : (Dv^k - Dv)$.

- En développant et en passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} (\Sigma^k - \Sigma^*(q^k, Dv)) : (Dv^k - Dv) \\ = \limsup_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^t \int_{\Omega} \Sigma^k : Dv^k - \Sigma : Dv}_{\text{d'après (a)}} \leq 0. \end{aligned}$$

- Mais d'autre part, grâce à Cauchy-Schwarz,

$$(\Sigma^k - \Sigma^*(q^k, Dv)) : (Dv^k - Dv) \geq 0.$$

$$\Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Sigma^k : Dv^k - \Sigma : Dv\|_{L^1 L^1} = 0$$

Conclusion

Ainsi

$$\Sigma^k : Dv^k \xrightarrow{L^1 L^1} \Sigma : Dv .$$

Conclusion

Ainsi

$$\Sigma^k : Dv^k \xrightarrow{L^1L^1} \Sigma : Dv .$$

Mais d'autre part, pour tout k

$$\Sigma^k : Dv^k = q^k |Dv^k|$$

donc par produit de convergence fort/faible,

$$\Sigma^k : Dv^k \rightharpoonup q |Dv| \in L^1L^1 .$$

Conclusion

Ainsi

$$\Sigma^k : Dv^k \xrightarrow{L^1L^1} \Sigma : Dv .$$

Mais d'autre part, pour tout k

$$\Sigma^k : Dv^k = q^k |Dv^k|$$

donc par produit de convergence fort/faible,

$$\Sigma^k : Dv^k \rightharpoonup q |Dv| \in L^1L^1 .$$

Par unicité de la limite, on a montré que

$$\Sigma : Dv = q |Dv| .$$

Conclusion

Ainsi

$$\Sigma^k : Dv^k \xrightarrow{L^1 L^1} \Sigma : Dv .$$

Mais d'autre part, pour tout k

$$\Sigma^k : Dv^k = q^k |Dv^k|$$

donc par produit de convergence fort/faible,

$$\Sigma^k : Dv^k \rightharpoonup q |Dv| \in L^1 L^1 .$$

Par unicité de la limite, on a montré que

$$\Sigma : Dv = q |Dv| .$$

Conclusion

$$(\Sigma, Dv) \in \mathcal{G}[q] .$$

Merci pour votre attention !