2019 AMALA-B Contrôle - corrigé

PARTIE I

On considère la matrice **A** et le vecteur **b** à coefficients réels définis par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2 1. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur les vecteurs

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

1 2. Déterminer une base orthonormale de l'espace des colonnes de la matrice **A**.

2 3. En déduire une décomposition **QR** de la matrice **A**.

3 4. Calculer la projection orthogonale du vecteur **b** sur l'espace des colonnes de **A**.

2 5. À l'aide de la décomposition **QR** de la matrice **A**, trouver la solution des moindres carrés du système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

1. $\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\tilde{q}_2 = a_2 - q_1^T \cdot a_2 \cdot q_1$, $\quad q_1^T \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1\ 2\ 0) \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1\cdot 8 + 2\cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

$$\tilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} - 2\sqrt{5}\, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\|\tilde{q}_2\| = \sqrt{3^2 (2^2 + (-1)^2 + (-2)^2)} = \sqrt{9 \cdot 9} = 9$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \boxed{\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}}$$

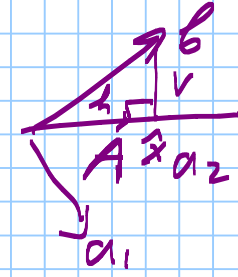
2. Une base orthonormale est donc $\{q_1, q_2\}$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

3. QR : $\quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -1/3 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 \\ 0 & q_2^T a_2 \end{pmatrix}$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad q_2^T a_2 = \frac{1}{3} (2\ -1\ -2) \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{2\cdot 8 - 1 + 2\cdot 6}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

4. b sur les colonnes de A :



$$(A^T b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$v \perp Vect(a_1, a_2)$ $\quad h \in Vect(a_1, a_2)$

$Ax = h$ $\qquad$ On cherche h, et $h = Ax$

$A^T h = A^T(h+v)$ car $A^T v = 0$ $(v \perp A)$

Donc $A^T A x = A^T b$ et $h = Ax = A(A^TA)^{-1}A^Tb = QQ^Tb$

$$h = \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 & 2/3 \\ 2/\sqrt5 & -1/3 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 & 2/3 \\ 2/\sqrt5 & -1/3 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}}$$

5. $A = QR$, $\quad A\hat{x} = b$

$$A^T A \cdot \hat{x} = A^T b, \quad \hat{x} = (A^TA)^{-1} A^T b = ((QR)^T QR)^{-1} (QR)^T b$$

$$\hat{x} = (R^T \underbrace{Q^T Q}_{Id} R)^{-1} R^T Q^T b = \boxed{R^{-1} Q^T b}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt5 & 2\sqrt5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt5 x + 2\sqrt5 y = 0 \\ 9y = -2/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4/27 \\ y = -2/27 \end{cases}$$

Partie II

On considére la matrice $\mathbf{B}$ de $\mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix}.$$

On notera $\mathbf{B}^\top$ sa matrice transposée.

1. Déterminer une base de l'espace des colonnes de la matrice $\mathbf{B}$.
2. Déterminer une base de l'espace des lignes de la matrice $\mathbf{B}$.
3. Déterminer le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ orthogonal au sous-espace colonnes($\mathbf{B}$). C'est-à-dire le sous espace de $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs $\mathbf{x}$, tels que $\mathbf{x}^\top\mathbf{y} = \mathbf{0}$, pour tout vecteur $\mathbf{y}$ de colonnes($\mathbf{B}$).
4. Déterminer le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ orthogonal au sous-espace lignes($\mathbf{B}$). C'est-à-dire le sous espace de $\mathbb{R}^4$ formé des vecteurs $\mathbf{x}$, tels que $\mathbf{x}^\top\mathbf{y} = \mathbf{0}$, pour tout vecteur $\mathbf{y}$ de lignes($\mathbf{B}$).
5. En déduire le noyau de la matrice $\mathbf{B}$, ainsi que le noyau de sa transposée $\mathbf{B}^\top$.
6. A quelles conditions sur b_1, b_2 et b_3 l'équation $\mathbf{Bx} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ possède une solution.

1. Il y a 4 colonnes = 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$
La base de cet espace a au maximum 3 vecteurs (dans $\mathbb{R}^3$ - il y a au max 3 vect. linéairement independents). On remarque que deuxième colonnes est 3× première :

(1) $\boxed{V_2 = 3V_1}$ $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc il faut voir V_1, V_3, V_4 : on a (2) $\boxed{2V_1 - V_3 + V_4 = 0}$

(on le voit directement ou bien on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.q. $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_3 + \lambda_3 V_4 = 0$ - c'est un système :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -1\cdot\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + (-3)\lambda_3 = 0 \end{cases} \overset{L_1/2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1\cdot\lambda_1 + 5/2\lambda_2 + 1/2\lambda_3 = 0 \\ -1\lambda_1 + 3\cdot\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 1\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3-2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + 5/2\lambda_2 + 1/2\lambda_3 = 0 \\ 11/2\lambda_2 + 11/2\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_2 + -4\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases}$$

~~Donc~~ $V_3 = 2V_1 + V_4 \Rightarrow (V_1, V_4)$ forment une base des colonnes

ou bien (V_1, V_3) ou (V_2, V_3) ou (V_3, V_4) ou (V_2, V_4) ~~etc~~.

2. Espace de lignes :

$l_1 = [2\ 6\ 5\ 1]$, $l_2 = [-1\ -3\ 3\ 5]$, $l_3 = [2\ 6\ 1\ -3]$

$$\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 + \mu_3 l_3 = 0$$

donne :

$$\begin{cases} 2\mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3 = 0 & L_1 \\ 6\mu_1 - 3\mu_2 + 6\mu_3 = 0 & L_2 \\ 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 = 0 & L_3 \\ \mu_1 + 5\mu_2 - 3\mu_3 = 0 & L_4 \end{cases}$$

On a $L_2 = 3L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3 = 0 \\ 5\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3 = 0 \\ \mu_1 + 5\mu_2 - 3\mu_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 = L_1 - 2L_3 \\ L_3 = L_2 - 5L_3}}{\overset{L_1 = L_3}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \mu_1 + 5\mu_2 - 3\mu_3 = 0 \\ 0 + (-11)\mu_2 + 8\mu_3 = 0 \\ 0 + (-22)\mu_2 + 16\mu_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 3\mu_3 - 5\mu_2 = \left(\frac{33}{8} - 5\right)\mu_2 = -\frac{7}{8}\mu_2 \\ \mu_3 = \frac{11}{8}\mu_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ On a $\boxed{-7l_1 + 8l_2 + 11l_3 = 0}$ (*)

$\Leftrightarrow$ 2 lignes parmi 3 forment une base

par exemple : (l_1, l_2) ou (l_1, l_3) ou (l_2, l_3).

3. Vecteur de $\mathbb{R}^3$ annulé par l'espace de colonnes

Prenons une base (v_1, v_4) :

Il faut trouver $X = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$ t.q $\begin{cases} X^T v_1 = 0 \\ X^T v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3 = 0 \\ \mu_1 + 5\mu_2 - 3\mu_3 = 0 \end{cases} \underset{L_2 = L_1 - 2L_2}{\overset{L_1 = L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \mu_1 + 5\mu_2 - 3\mu_3 = 0 \\ -11\mu_2 + 8\mu_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = -\frac{7}{8}\mu_2 \\ \mu_3 = \frac{11}{8}\mu_2 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ 1 \\ 11/8 \end{pmatrix} \mu_2 \text{ ou } X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

(On a déjà vu l'éq. (*) dans la question (2)).

4. On cherche $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \perp \mathrm{Vect}(l_1, l_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 5\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -1\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \end{cases} \underset{L_1+2L_2}{\overset{L_1=-L_2}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 - 5\lambda_4 = 0 \\ 11\lambda_3 + 11\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 2\lambda_4 \\ \lambda_3 = -\lambda_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_2 + 2\lambda_4 \\ \lambda_3 = -\lambda_4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -3\lambda_2 + 2\lambda_4 \\ \lambda_2 \\ -\lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_4 \Leftrightarrow x \in Vect\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On l'a déjà trouvé en question 1 en eq. (1) et (2)

5. Le noyau de B - c'est l'espace annulé par les lignes de B donc $Vect\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

et de B^T - annulé par les colonnes : $Vect \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$

6. $Bx = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ a une solution si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ est dans l'espace des colonnes de B.

C'est la condition (*) de la question (*) car les lignes de B satisfont (*) alors le résultat aussi. En effet, être dans l'espace de colonnes de B signifie que il $\exists \lambda$ et μ réels t.q $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda v_1 + \mu v_4$ si on prend (v_1, v_4) comme base

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ donnent :

$$\begin{cases} b_1 = 2\lambda + \mu \\ b_2 = -1\cdot\lambda + 5\mu \\ b_3 = 2\lambda - 3\cdot\mu \end{cases} \overset{\substack{L_1=L_1 \\ L_2=2L_2+L_3 \\ L_3=3L_2+5L_3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b_1 = 2\lambda + \mu \\ 2b_1 + b_3 = 7\mu \\ 3b_2 + 5b_3 = 7\lambda \end{cases} \quad \begin{aligned} 7b_1 &= 2(3b_2 + 5b_3) + 2b_2 + b_3 \\ &= 8b_2 + 11b_3 \end{aligned}$$

Donc la relation on b_1, b_2, b_3 est $\boxed{-7b_1 + 8b_2 + 11b_3 = 0}$