## PARTIE I

On considère la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{b}$ à coefficients réels définis par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**1.** Décomposer la matrice $\mathbf{A}$ sous la forme $\mathbf{LU}$.

**2.** En déduire le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$.

**3.** Résoudre le système $\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$.

**4.** En déduire la solution du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Soient quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**5.** Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur les vecteurs $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$. Ces trois vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ ?

**6.** En déduire la décomposition $\mathbf{QR}$ de la matrice $\mathbf{A}$.

**7.** À l'aide de la décomposition $\mathbf{QR}$ de la matrice $\mathbf{A}$, résoudre le système

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_1 \to L_1,\ L_2 \to L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Vérification: $LU = A$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\det A = \det L \cdot \det U$

$= \boxed{-4}$

$\det L = 1$, $\det U = 2 \cdot 2 \cdot (-1)$

$= -4$

3. $Lc = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ -2x + y = 1 \\ -x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 + 2 \cdot 5 = 11 \\ z = 3 + x - y = 3 + 5 - 11 \end{cases} \quad \boxed{c = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

4. $Ax = b \Leftrightarrow U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 5 \\ 2y + 3z = 11 \\ -z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

5. Soit : $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\tilde{q}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \|\tilde{q}_1\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$$q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\langle a, q_1 \rangle = 2\sqrt{6}}$$

$$\tilde{q}_2 = b - \langle b, q_1 \rangle q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - (-\sqrt{6}) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle b, q_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = -4/\sqrt{6} - 2/\sqrt{6} = \frac{-6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}, \quad \|\tilde{q}_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} \Rightarrow \boxed{q_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

$$\tilde{q}_3 = c - \langle c, q_1 \rangle q_1 - \langle c, q_2 \rangle q_2$$

$$\langle c, q_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \boxed{-2/\sqrt{6}}$$

$$\langle c, q_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} - \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{6} - 1 \\ 1 - \frac{4}{6} \\ 1 - \frac{2}{6} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad \|\tilde{q}_3\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$q_3 = \frac{\tilde{q}_3}{\|q_3\|} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}$$

Ces vecteurs $q_1, q_2, q_3$ forment une base orthonormée car ils sont ortogonals 2-à-2 et de norme 1.

## 6. <u>Une décomposition QR</u>

$$R = \begin{pmatrix} \langle a, q_1 \rangle & \langle b, q_1 \rangle & \langle c, q_1 \rangle \\ 0 & \langle b, q_2 \rangle & \langle c, q_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle c, q_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

<u>Vérification</u>: $QR = A$?

(au cas où)

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1+1 & -2/6+1+\frac{1}{3} \\ -4 & 2 & 4/6+1/3 \\ -2 & 1+1 & 2/6+1-1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## <u>5-6. Si le dernier vecteur est</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ <u>au lieu de</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \overbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle}^{\langle c, q_1 \rangle} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \overbrace{\frac{1-2-3}{\sqrt{6}}}^{-4} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} - \overbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3/\sqrt{2}\right)}^{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/6 \\ -8/6 \\ -4/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ -4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \frac{\tilde{q}}{\|\tilde{q}\|} = \frac{1}{\sqrt{3\left(\frac{1}{9}\right)}} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$R'' = \begin{pmatrix} \langle a, q_1 \rangle & \langle b, q_1 \rangle & \langle c, q_1 \rangle \\ 0 & \langle b, q_2 \rangle & \langle c, q_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle c, q_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} & -4 \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

---

7. $Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow QRx = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Rx = Q^T \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Q est une matrice orthogonale $\Rightarrow Q^{-1} = Q^T$
et R - triang. superieur - c'est facile à calculer x

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On a $\begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{6} & - \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{6}\,x - \sqrt{6}\cdot y - \frac{2}{\sqrt{6}} z = \frac{5}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{2}\,y + \sqrt{2}\,z = 5/\sqrt{2} + 3/\sqrt{2} \\ \frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 6y - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 8 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

On retrouve la même reponse que par la méthode LU.