Partie II Examen Finale AMALAB 2018

Exercice 1.

On considère la matrice $\mathbf{A}_3$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & -5 \\ -1 & 6 & -30 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exercice, on applique la méthode de Gauss-Seidel à la matrice $\mathbf{A}_3$.

1. Déterminer la matrice de Jacobi $\mathbf{B}_3$ de la matrice $\mathbf{A}_3$.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{B}_3$.
3. Déterminer le rayon spectral de $\mathbf{B}_3$.
4. La méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente pour la matrice $\mathbf{A}_3$?
5. Faire trois itérations de calcul de solution de l'équation suivante

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

en utilisant

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

comme un vecteur de départ.

—"—

$B = M^{-1}N$ où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 6 & +30 \end{pmatrix}$$

et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M^{-1} :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 6 & -30 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \xrightarrow[L_1+L_3]{L_1+L_2} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -30 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L_2/6} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -30 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{-L_3+6L_2} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L_3/(-30)} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{30} \end{matrix} \right), \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/30 & -1/30 \end{pmatrix}$$

$$B = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/30 & -1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$$

2. La matrice B est triang. superieur
– ces valeur propres sont sur sa diagonale :

$$\boxed{Sp(B) = \{0, \tfrac{1}{3} \text{ et } \tfrac{1}{6}\}}$$

C

3. Rayon spectral : $\rho_B = \max\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\} = \boxed{\frac{1}{3}}$

4. La methode de Gauss-Seidel est <u>convergente</u> car $\rho_B < 1$

5

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}\\ y_{k+1}\\ z_{k+1}\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\\ z_k\end{pmatrix} + M^{-1}b, \quad M^{-1}b = \begin{pmatrix}1&0&0\\ 1/6&1/6&0\\ 0&1/30&-1/30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 10\\ 35\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 5/3\\ -5/6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 5/3\\ -5/6\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\ 5/3\\ -5/6\end{pmatrix}}$$

$$\frac{10}{30} - \frac{35}{30} = \frac{1}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{15}{6} \qquad \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \qquad \frac{5}{2}.$$

$$\begin{pmatrix} x_2\\ y_2\\ z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2&1\\ 0&1/3&1\\ 0&0&1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 5/3\\ -5/6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 5/3\\ -5/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{3}-\frac{5}{6}\\ \frac{5}{9}-\frac{5}{6}\\ -5/36\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 5/3\\ -5/6\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}15/6\\ 25/18\\ -\frac{35}{36}\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x_3\\ y_3\\ z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2&1\\ 0&1/3&1\\ 0&0&1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5/2\\ 25/18\\ -\frac{35}{36}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 10/6\\ -5/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{50}{18}-\frac{35}{36}\\ \frac{25}{3\cdot 18}-\frac{35}{36}+\frac{25}{18}\\ -\frac{35}{36\cdot 6}-\frac{5}{6}\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{65}{36}\\ \frac{95}{108}\\ -\frac{215}{216}\end{pmatrix}},$$

$$100 - 35 = \frac{65}{3}$$

$$\frac{50 - 105 + 150}{3\cdot 18} = \frac{95}{6\cdot 18}$$

$$\frac{-5\cdot 36 - 35}{216} = \frac{-215}{216}$$

Vérification :

En fait la solution exacte est $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ et on voit déjà bien que $y_k \to 1$, $z_k \to -1$

pour x_k on le verra avec plus d'itérations

On remarque

$$B\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} + M^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 10\\ 35\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&2&1\\ 0&1/3&1\\ 0&0&1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 5/3\\ -5/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1\\ 1/3-1\\ -1/6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 5/3\\ -5/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \text{ Hourra!}$$

Exercice 2.

On considère la matrice $\mathbf{A}_4$ à coefficients réels définie par

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array}$$

1. Calculer une décomposition **QR** de la matrice $\mathbf{A}_4$.

2. Calculer le déterminant de la matrice **R**.

3. En déduire le déterminant de la matrice **Q**.

4. À l'aide de cette décomposition **QR** de la matrice $\mathbf{A}_4$, résoudre le système

$$\mathbf{A}_4 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

—"—

Gram-Schmidt:

$$a_1 \to e_1 = \frac{a_1}{|a_1|}$$

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$a_2 \mapsto a_2 - ({}^T a_2 e_1) \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (3-1)}^{2/\sqrt{2} = \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$$

$$\boxed{e_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$$

$$a_3 \mapsto a_3 - (a_3^T \cdot e_1) \cdot e_1 - (a_3^T \cdot e_2) e_2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \underbrace{\left((3\ 1\ 5) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right)}_{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\left((3\ 1\ 5) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right)}_{3} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|a_3| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\boxed{e_3 = \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

$$R = \begin{pmatrix} a_1^T e_1 & a_2^T e_1 & a^T e_1 \\ 0 & a_2^T e_2 & a_3^T e_2 \\ 0 & 0 & a_3^T e_3 \end{pmatrix}, \quad \boxed{R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

2. $\det R = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 18$

3. $+ A_2 - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5-1-15+3 = -18$

Comme $- = QR$ on a $\det A = \det Q \cdot \det R$

et $\det Q = \dfrac{\det A}{\det R} = \dfrac{-18}{18} = -1$

Q est orthogonal i.e. $Q^T Q = \text{Identité}$

4 Pour resoudre $QR \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

On multipli cette eqn. par Q^T à gauche:

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \underbrace{Q^T Q}_{\text{Id}} R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

, Q est orthog

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & 1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 6 \\ \sqrt{18} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 6 \\ \sqrt{18} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z = 2\sqrt{2} \\ 3y + 3z = 6 \\ \sqrt{18}\, z = \sqrt{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$