2017-18 Feuille 4. Limites des fns de plusieurs variables

Exo 13

1. $f_1 : (x,y) \longmapsto \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $(1,0)$

$$\ln(x+e^y) \longrightarrow \ln(1+e^0) = \ln 2$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \sqrt{1^2+0^2} = 1 \neq 0$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f_1(x,y) = \ln 2$ par continuité d'une fraction des fns continue avec le dénominateur $\neq 0$

2. $f_2(x,y) = \dfrac{x^3+(y+1)^3}{x^2+(y+1)^2} \underset{\substack{X=x\\ Y=y+1}}{=\!=} \dfrac{X^3+Y^3}{X^2+Y^2}$

en $(0,-1)$

$$= \frac{r^3\cos t + r^3 \sin t}{r^2} = r(\cos t + \sin t)$$

$r(\cos t + \sin t) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ car $r \longrightarrow 0$ multiplié par une fonction bornée $|\sin t + \cos t| < 2$

3. $f_3(x,y) = \dfrac{(x-1)^3(y-2) - (y-2)^2(x-1)}{(x-1)^4 + (y-2)^2}$

On a $u = x-1$, $v = y-2$

qui donnent la fonction $\dfrac{u^3v - v^2u}{u^4+v^2}$

$$= \frac{\cancel{r^2}(r^2\cos^3 t \sin t - r\cos t^2 \sin t)}{\cancel{r^2}(r^2\cos^4 t + \sin^2 t)}$$

En coord. polaires : $u = r\cos t$, $v = r\sin t$

le haut $\xrightarrow[r\to 0]{} 0$ car

$r^2 \to 0$ et $\cos^3 t \sin t$ est borné

$r \to 0$ et $\cos t \sin^2 t$ est borné

et le denominateur $\longrightarrow \sin^2 t$

quand $r \longrightarrow 0$

du coup si $\sin^2 t \neq 0$ la limite

est $= 0$

si $\sin t = 0$ i.e. $v = r\sin t = 0$

On a $\dfrac{u^3 v + v^2 u}{u^4 + v^2} = \dfrac{0}{u^4} = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f_3(x,y) = 0$

4. $f_4(x,y) = \dfrac{x+5}{(x+2)^5 + y^2}$ n'a pas de limite

car en changeant de variable

$u = x+5$ puis en passant par
$v = y$ coord. polaires on a

$$\frac{u}{u^2+v^2} = \frac{r\cos t}{r^2} = \frac{\cos t}{r}$$

et avec $r \longrightarrow 0$ $\dfrac{\cos t}{r} \longrightarrow \pm\infty$

(signe + ou − depend de $\cos t$)

Continuité

Exo 14.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. La fonction f est continue en $(0,0)$ si la $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f$ existe et égale à $f(0,0)$.

Une droite quelconque D passant par origine a pour équation $y = kx$ ou $x = 0$

La restriction sur $y = kx$ est

$$\frac{x^2 \cdot kx}{x^4+(kx)^2} = \frac{kx}{x^2+k^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\lim\limits_{x\to 0} kx}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+k^2)} = \frac{0}{k^2} = 0$$

si $k \neq 0$

$\Rightarrow f(x, kx)$ est continue en $(0,0)$

sur la droite $y = 0$ (quand $k=0$) on a $\frac{0}{x^4} = 0$ continue

et si $x = 0$ on a $\frac{0}{y^2} = 0$ - continue

La restriction de f à D est continue

2. Cependant on ne peut pas déduire que f est continue en $(0,0)$ car il faut m.q. f a pour limite 0, ~~pas seulement~~ sur les restrictions de f sur les

droites mais sur n'importe quel chemin passant par $(0,0)$.

Pour montrer cela on va passer aux coord. polaires pour conclure que en effet la limite est unique et $=0$.

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{r^3\cos^2t\sin t}{r^4\cos^4t + r^2\sin^2t}$$

$$= \frac{r\cos^2t\,\sin t}{r^2\cos^4t+\sin^2t} \xrightarrow[r\to 0]{} \begin{cases} \dfrac{\lim_{r\to 0} r\cos^2t\sin t}{\lim(r^2\cos^4t+\sin^2t)} = \dfrac{0}{\sin^2t} = 0 & \text{si } \sin t \neq 0 \\[2mm] \dfrac{0}{r^2\cos^4t} = 0 & \text{si } \sin t = 0 \end{cases}$$

$\underline{\text{Exo 15}}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

En coord. polaires: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$

$x^2+y^2 = r^2$

On a $$\frac{r^\alpha\cos^\alpha t\; r^\beta\sin^\beta t}{r^2} = r^{\alpha+\beta-2}\cos^\alpha t\sin^\beta t$$

$$\to \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha+\beta-2>0 \\ \pm\infty & \text{si } \alpha+\beta-2<0 \quad (\text{signe dépend de } \cos^\alpha t\sin^\beta t) \\ \cos^\alpha t\sin^\beta t & \text{si } \alpha+\beta-2=0 \end{cases}$$

Du coup la fonction est continue ssi $\alpha+\beta>2$.

Exo 16 $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car c'est une fraction de polynômes (fonctions continues), t.q. $x^2+y^2 \neq 0$ en dehors de $(0,0)$.

En $(0,0)$ on regarde encore en coord. polaires :

$$\frac{r^3(\cos^3 t + \sin^3 t)}{r^2} = \underset{\to 0}{r}\underbrace{(\cos^3 t + \sin^3 t)}_{\text{borné}}$$

alors $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

On peut prolonger la fonction f de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en $\mathbb{R}^2$ par continuité en fixant

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour la fonction $g(x,y) = \sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$

$g(x,y)$ est bien définie et continue en tant que composition des fonctions continues partout en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Comme $\frac{xy^2}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ (exo 15) on peut prolonger

$g(x,y)$ en $(0,0)$ par continuité car alors sin est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier

$\sin 0 = 0$ et donc

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sin \frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) = 0$ et on peut prolonger $g(x,y)$ par continuité en $(0,0)$ en fixant $g(0,0)=0$

<u>Exo 17</u> 1. $f(x,y,z) = \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$ sur $\mathbb{R}^3$

f est continue sur $\mathbb{R}^3$ partout où $x^2+2y^2+3z^2 \neq 0$ en tant que fraction des fonctions continues. c.à.d. f est continue sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

En $(0,0,0)$: si la $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ notons la L existe on peut prolonger f par continuité en $(0,0,0)$

Comportement de f en $(0,0,0)$?

Sur la restriction $z=0$, $y=mx$

on trouve $\lim_{x\to 0} f(x,mx,0)=\frac{m}{1+2m}$

depend de m

On conclut que puisque si L existe elle est unique, ici L depend de $m \Rightarrow L$ ne peut pas exister et f n'est pas prolongeable en $(0,0,0)$

<u>Exo 17.2</u> La fonction $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ partout où elle est définie, c.à.d.

La première coordonnée:

$g_1(x,y) = (x^2+y^2-1)\frac{\sin x}{x}$ est définie partout sauf en $x=0$

Mais $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow g_1(x,y)$ est prolongeable en $(0,y)$ par

$$\tilde{g}_1(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2+y^2-1)}{x}\sin x\ , & x\neq 0\\ y^2-1\ , & \text{si } x=0\end{cases}$$

Remarque: quand $x=0$, $g_2(0,y)=\frac{\sin y^2}{|y|}$

la deuxième coordonnée : 8

$g_2(x,y) = \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est définie et continue partout sauf quand $\sqrt{x^2+y^2} = 0$

On utilise $\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$ pour calculer la lim de g_2 en $(0,0)$

$$g_2(x,y) = \frac{2\sin\frac{x^2+y^2}{2}\cdot\cos\frac{x^2-y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

puisque $\dfrac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ on regardent $\dfrac{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ comme une fonction composé

$$(x,y) \longrightarrow u = x^2+y^2 \longrightarrow \frac{\sin(u/2)}{\sqrt{u}}$$

En posant $t = \frac{u}{2}$, $\sqrt{u} = \sqrt{2t}$

$\dfrac{\sin t}{\sqrt{2t}} = \sqrt{\dfrac{t}{2}}\,\dfrac{\sin t}{t}$ On a

$$g_2(x,y) = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos\frac{x^2-y^2}{2}}_{\text{borné}}$$

quand $(x,y)\to(0,0)$

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} g_2(x,y) = 0$$

et alors le prolongement de g par continuité :

$$\tilde{g}(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & x\neq 0,\ x^2+y^2\neq 0 \\ \left(y^2-1,\ \frac{\sin y^2}{|y|}\right) & \text{si } x=0,\ y\neq 0 \\ (-1,0), & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

Exercise 18

1. $f : (x,y) \longrightarrow \begin{cases} x^2 y & \text{si } x < y \\ y & \text{si } x \geq y \end{cases}$

Ici sur les parties $x<y$ et $x>y$ f est continue. La question se pose sur le bord entre les deux domaines.

$x=y$ Il faut étudier dans chaque point de bord (t,t)

$\lim_{(x,y)\to(t,t)} f\Big|_{x<y}$ et $\lim_{(x,y)\to(t,t)} f\Big|_{x>y}$ et les comparer :

$$\lim_{(x,y)\to(t,t),\, x<y} x^2 y = t^3 \,,\quad \lim_{(x,y)\to(t,t),\, x>y} y = t$$

$t^3 = t \Leftrightarrow (t=0$ ou $t=\pm 1)$

Du coup la fonction est continue sur $(\mathbb{R}^2 \setminus \{x=y\}) \cup \{(0,0), (-1,-1), (1,1)\}$

Exo 18. 2. $f(x,y) \to \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0, \text{ si } xy = 0 \end{cases}$

$\sin\frac{1}{xy}$ n'a pas de limite quand $xy \to 0$, car $\frac{1}{xy} \to \pm\infty$ et $\lim_{t\to\pm\infty} \sin t$ n'est pas défini. Par contre en $(0,0)$ on a bien une limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\sin\frac{1}{xy}}_{\text{borné}} = 0 \text{ (gendarmes)}$$

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy=0\} \cup \{(0,0)\}$

Exo 18.3 $f : (x,y) \to \begin{cases} x^4 & \text{si } x^2 < y \\ y^2 & \text{si } x^2 \geq y \end{cases}$

Encore : f est continue sur $x^2 < y$ et $x^2 > y$ (polynômes)

Sur la frontière $x^2 = y$ on a dans les points $(x,y) = (t,t^2)$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(t,t^2) \\ x^2<y}} f = x^4\Big|_{x=t} = t^4$$

et

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(t,t^2) \\ x^2>y}} f = y^2\Big|_{y=t^2} = t^4$$

Comme ce sont les mêmes on conclut que f est continue sur $\mathbb{R}^2$!

Exo 19 Fonctions bornées dans $\mathbb{R}^2$

$f_1(x,y) = (x+2y^2)\exp(-|xy|)$

la fonction $\exp(-|xy|) \leq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

la fonction $x+2y^2$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^2$ et peut aller à l'∞.

Par contre on remarque que puisque f est continue sur $\mathbb{R}^2$ sur n'importe quel domaine compacte (= fermé et borné) f atteint son max et son min donc en particulier f est bornée.

La question est alors qu'est ce que ce passe quand $\|(x,y)\| \to +\infty$

Par les croissances comparées on a

$\lim_{t \to +\infty} t^n \exp(-|t|) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

du coup $(x+2y^2)\exp(-|xy|)$ ne doit pas aller vers $\pm\infty$ non plus

$\Rightarrow f_1$ est bornée. Plus precisement soit $M \in \mathbb{R}_+$ pour $\|(x,y)\|$ suffisesament grand, i.e.

il $\exists r$ t.q. $\{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \geq r^2\}$ on a

$$|x \exp -|xy|| \leq \begin{cases} |xy|\exp(-|xy|) < M, & \text{si } |y| \geq 1 \\ |x|\exp(-|x|) < M, & \text{si } |y| < 1 \end{cases}$$

et aussi $\exists r'$ t.q. $\{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \geq r'\}$

$$y^2 \exp(-|xy|) \leq \begin{cases} (xy)^2 \exp(-|xy|) < \frac{M}{2} \text{ si } |x| \geq 1 \\ y^2 \exp(-|y|) < \frac{M}{2} \text{ si } |x| < 1 \end{cases}$$

On compare les rayons r et r' on prend le plus grand pour conclure que la somme

$$(x^4+2y^2)\exp(-|xy|) < 2M$$

et alors f_1 est bornée sur un disque car continue sur un compact

et f_1 est bornée en dehors du disque par les croissances comparées $\boxed{f_1 \text{ est bornée dans } \mathbb{R}^2}$

$f_2(x,y) = \exp(\cos(1+xy))$ est evidement borné dans $\mathbb{R}^2$, car $|\cos(1+xy)| \leq 1$

$$\Rightarrow \exp(\cos(1+xy)) \leq \exp 1$$

f_3 est similaire à f_1 et bornée pour les mêmes raisons :

on peut majorer (x^4+y^2) par la somme de

$$(x^2+y^4)^2 = x^4+2x^2y^4+y^8 \text{ et } (x^2+y^4)^{1/2}$$

et utiliser encore les croissances comparées