2017-18 - Analyse III Feuille 6.

les techniques classiques d'étude :
- étude des variations de |f_n-f| pour déterminer explicitement sa borne supérieure et regarder si elle tend ou non vers 0 quand n->+infty

- majoration de |f_n(x)-f(x)| par a_n indépendante de x et tendant vers 0, pour en déduire que la borne sup est inférieure à a_n donc tend vers 0 aussi

- détermination d'une suite (x_n)_n telle que |f_n(x_n)-f(x_n)| ne tend pas vers 0, pour écrire sous réserve d'existence sup |f_n -f| \geq |f_n(x_n)-f(x_n)| donc ne peut pas tendre vers 0.

Exo 1.

1 Conv. simple sur $[0,1]$. On fixe x. La suite

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} + \arctan x\right) = 0 + \arctan x$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x\in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases}$$

2. Convergence uniforme

Thm 6. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $f_n - f$ soit borné et $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ n\geq N_0}]{} 0$

Borné ?

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{x+n} + \arctan x - \arctan x\right| = \frac{x}{x+n} \leq 1 \quad \forall n \geq N_0 = 0$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{x+n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Conclusion $f_n(x)$ C.U. sur $[0,1]$

$g_n - g$ borné ? $$|g_n(x) - g(x)| = \begin{cases} \left|\frac{nx}{1+nx} - 1\right| & \text{si } x\in]0,1] \\ \frac{n\cdot 0}{1+n\cdot 0} - 0 = 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left|\frac{nx - 1 - nx}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+nx} & \text{si } x\in]0,1] \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

$$\frac{1}{1+nx} \leq 1 \quad \forall x\in]0,1] \quad \forall n \geq N_0 = 0$$ – borné ✓

Soit $n \geq N_0$ fixé : $\sup_{x\in]0,1]} \left|\frac{1}{1+nx}\right| = 1 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

alors $g_n(x)$ ne C.U. sur $[0,1]$ ou sur $]0,1]$

Et sur $[a,1]$ on a

$$\sup_{x\in[a,1]} \left|\frac{1}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+n\cdot a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

alors on a la C.U. de g_n sur $[a,1]$.

2. Etude sur $[1,+\infty[$

$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N_0$ $f_n - f$ est bornée

et $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ n\geq N_0}]{} 0$

Ici toujours :

$$f_n - f = \frac{x}{x+n} \text{ - bornée par } 1 \quad \forall n \geq 0$$

Pour n fixé, on a

$$\sup_{x\in[1,+\infty[} \left|\frac{x}{x+n} + \arctan x - \arctan x\right|$$

$$= \sup_{x\in[1,+\infty[} \left|\frac{x}{x+n}\right| \underset{\text{pour } n \text{ fixé}}{=} 1, \quad 1 \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ n\geq N_0}]{} 0 \text{ - faux}$$

$\Rightarrow$ pas de convergence uniforme sur $[1,+\infty[$

$$|g_n - g| = \frac{1}{1+nx} \leq 1, \ \forall n \geq N_0 = 0$$

$$\sup_{x\in[1,+\infty[} |g_n - g| = \sup_{x\in[1,+\infty[} \left|\frac{1}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

alors g_n C.U. sur $[1,+\infty[$

Exo 2

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2)$$

1. x - fixé $\in [-1,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(nx^2)\cdot\exp(-nx^2) = 0 \text{ car}$$

$|\sin(nx^2)| \leq 1$ - borné et $\exp(-nx^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $x \neq 0$

et si $x = 0$, $\sin(n \cdot 0^2) = 0$

$f_n(x) \longrightarrow f(x) = 0$ - fonction const. nulle

2. $|f_n - f| = |\sin nx^2 \exp(-nx^2)| \leq 1$

borné $\forall n \geq N_0 = 0$

Pour m.q. il n'y a pas de C.U on cherche une suite $x_n \in [0,1]$ t.q.

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

(ce qui implique que alors $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$)

En effet en prenant $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \in [0, 1]$ on a

$$\sin(nx_n^2)\exp(-nx^2) = \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\exp\left(-n\cdot\frac{\pi}{2n}\right)$$
$$= 1\cdot\exp -\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

3. Pour montre la C.U. sur $[a,1]$ on rappel encore le thm 6, $f_n - f$ est borné pour $n \geq 0$ et pour n-fixé on a

$$\sup_{x\in[a,1]} |\sin(nx^2)\cdot\exp(-nx^2)| \leq 1\cdot\exp(-na^2)$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exo 3) $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$

CV simple : on fixe $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} x^n \cdot e^{-x}}{1+\lim_{n\to+\infty} x^n} = \begin{cases} \dfrac{0 \cdot e^{-x}}{1+0} = 0, & x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2e}, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Chaque f_n est continue mais la fonction limite n'étant pas continue en 1 on conclut (thm 10) que il n'y a pas de conv. uniforme sur l'intervale $[0,1]$.

C.U sur $[0,1[$? $f_n - f$ borné par

$$\left| \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n} - 0 \right| \leq \frac{1 \cdot e^{-0}}{1+1} = \frac{1}{2}$$

on remarque que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approche 1 suffisamment vite $f_n(x_n)$ ira pas à zéro. En effet, soit $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to+\infty} e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{1+\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e}}{1+\frac{1}{e}} = \frac{1}{(e+1)\cdot e}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{-1} \lim_{n\to+\infty} e^{1/n} = \frac{1}{e} \underset{n\to+\infty}{\neq} 0$$

Donc pas de conv. uniforme sur $[0,1[$

C.U sur $[0,a]$? $f_n - f$ borné (déjà montré pour $[0,1]$ et $[0,a] \subset [0,1]$)
Soit n fixe :

$$\sup_{x\in[0,a]} \left| \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n} \right| \leq \frac{a^n e^{-0}}{1+0^n} = a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc f_n c.u. sur $[0,a]$, $a<1$

__Exo 4__ $f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$

1. Cv. simple : On fixe $x \in [0,1[$ alors $f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ car pour x fixé le nombre $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est dépassé par un certain $N_0 \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq N_0$

2. On fixe $n \in \mathbb{N}$.
$\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = n$ car pour n fixé
$\exists x < 1$ t.q. $\frac{1}{\sqrt{1-x}} > n$

3. Pour chaque $x \in [0,1[$ fixé
$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ est bien défini et $= \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

Pour chaque n fixé, $\lim_{x\to 1^-} f_n(x)$ est bien défini $= n$ (différent de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$)
La double limite n'est pas fini
$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x}}|$

n'est pas borné à partir d'un certain N_0.

Par l'absurde : supposons que $\exists N_0$ t.q. $\forall n \geq N$ $|f_n - f|$ est borné

c. à. d. $\forall x \in [0, 1[$ on a

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right| \leq M \text{ - borne}$$

En particulier on a

$$f_{N_0}(x) = N_0 \text{ pour } x \text{ suffisamment}$$

proche de 1. La différence alors

$$|f_{N_0}(x) - f(x)| = \left| N_0 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right| \longrightarrow +\infty$$

Pas de C.U. de f sur $[0, 1[$ alors

$\underline{\boxed{\text{Exo 6}}}$ $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$

1. Soit $x \in [0, 1]$ fixé.

$$\frac{2^n x}{1 + 2^n \cdot n \cdot x^2} = \frac{x}{\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0} + \underbrace{n \cdot x^2}_{\to \infty \text{ si } x \neq 0}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

2. $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 \frac{2^n t}{1 + 2^n n t^2} dt = \left[\frac{\ln u}{2 \cdot n} \right]_1^{1+2^n n}$$

$u = 1 + 2^n \cdot n \cdot t^2$ $\qquad t = 0 \Rightarrow u = 1$

$du = 2^{n+1} n t \, dt$ $\qquad t = 1 \Rightarrow u = 1 + 2^n \cdot n$

$$= \boxed{\frac{\ln(1 + 2^n \cdot n)}{2n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+2^n\cdot n)}{2n} = +\infty$$

<u>Thm 13</u> 1. $f_n \longrightarrow f$ uniformement alors

$$\int_0 f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0 f(x)\,dx = 0$$

Ce que ne se produit pas ici. Pas de conv. uniforme.

<u>3 Démo</u> : On trouve une suite x_n t.q. $f_n(x_n) \not\to 0$.

$$\frac{2^n x_n}{1+2^n n x_n^2} \quad \text{si on prend} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n2^n}} \longrightarrow 0$$

on a $\dfrac{2^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n2^n}}}{1+2^n n x_n^2} = \dfrac{\sqrt{2^n}}{2n} = \dfrac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n}$

qui tend vers $+\infty$

<u>Exo 7</u> $\quad f_n(x) = \dfrac{n e^{-x} + x^2}{n+x^2}$

a. On fixe x. alors la suite numérique

$$\frac{n e^{-x} + x^2}{n+x^2} = \frac{e^{-x} + \frac{x^2}{n}}{1 + \frac{x^2}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$$

b. C.U. sur $[a,b]$: on a

$$\left| \frac{n e^{-x} + x^2}{n+x^2} - e^{-x} \right| = \left| \frac{x^2(1-e^{-x})}{n+x^2} \right| \le \left| \frac{x^2}{n+x^2} \right|$$

$$\le \frac{\max(a^2, b^2)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \left(\text{borné par } \max(a^2, b^2)\right)$$

alors converge unif. sur $[a,b]$

c. Ne conv. pas univ. sur $[a,+\infty[$

$$\left|\frac{x^2(1-e^{-x})}{n+x^2}\right| = \left|\frac{x^2}{n+x^2} - \frac{x^2e^{-x}}{n+x^2}\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \neq 0$$

pour n fixé — $\frac{x^2}{n+x^2} \to 1$, $\frac{x^2e^{-x}}{n+x^2} \to 0$

d. $$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\,dx$$

Puisque f_n C.U. sur $[0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$$ par le thm. de cours

Donc $$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1$$
$$= 1-\frac{1}{e} = \boxed{\frac{e-1}{e}}$$

Exo 8

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3x^2+2n^2x, & x\in[0,\frac{2}{n}] \\ 0 & x\in[\frac{2}{n},1] \end{cases}$$

1. Cv. simple : soit x fixé, $\exists N_0$ t.q. $x > \frac{2}{N_0}$ $\left(N_0 = \left[\frac{2}{x}\right]+1\right)$

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ car pour $n > N_0$ on a $f_n(x) = 0$

2. $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{1} -n^3x^2+2n^2x\,dx$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{n^3}{3}x^3 + \frac{2n^2}{2}x^2\right]_0^1 = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{n^3}{3}+n^2\right)$$

pas de limite ! Le résultat $\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

3. Si $(f_n)_n$ converge unifm. Par le thm du cours

on devrait avoir $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0$

ce que n'est pas le cas.

Exo 9 | $(f_n)_n = \cos^n(x)\sin x$

a. pour x fixé :

$|\cos^n(x)\sin x| \longrightarrow 0$ car si $x=0$, $\sin x = 0$

et si $x\neq 0$ on a $|\cos x| < 1$ et $|\cos^n(x)| \xrightarrow[n\to 0]{} 0$

C.U. : $|\cos^n x \sin x| < 1$ borné

et pour n fixé on a

$f_n(x)$ la fonction positive continue

sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ avec $f_n(0) = f_n(\frac{\pi}{2}) = 0$

alors atteint son max sur

$[0,\frac{\pi}{2}]$ — on calcul la dérivé

pour trouver le pt x_n ou cela se produit :

$$f_n'(x) = -n\cos^{n-1}x\cdot(\sin^2 x) + \cos^n x\cdot\cos x$$

$$= \cos^{n-1}(x)\left(\cos^2 x - n\sin^2 x\right) = 0$$

pour $\frac{\sin^2 x_n}{\cos^2 x_n} = \frac{1}{n} \overset{\text{pour } n\geq 1}{\Longrightarrow} \sin x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos x$

On a $\sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}(f_n(x)) = f_n(x_n)$

$\cos^n x \sin x = \cos^{n+1} x\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n\geq 1$

on voit que $\frac{\cos^{n-1} x}{n} \longrightarrow 0$

Donc par le thm du cours (#6)

on a la conv. uniforme.

Exo 96 $\quad g_n = (n+1) f_n$

Sur $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ pour <u>n fixé</u> :

$$\left|(n+1)\cos^n x \cdot \sin x\right| \leq \left|(n+1)\cos^n(x)\right|$$

et alors le $\sup\limits_{x \in [\delta, \frac{\pi}{2}]} (g_n) \leq (n+1)\cos^n\delta$

$|\cos\delta| < 1$ alors par les croissances comparées :

$$(n+1)(\cos\delta)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\int_0^{\pi/2} g_n(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos^n(x)\sin x\,dx = \left[-\cos^{n+1} x\right]_0^{\pi/2} = 1$$

On conclut que il n'y a pas de C.U. sur $[0, \pi/2]$

Exo 10 Convergence uniforme et dérivées

1. $\left|f_n(x) - 0\right| = \left|\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right| \leq 1$ pour $n \geq 0$ (borné)

soit n fixé

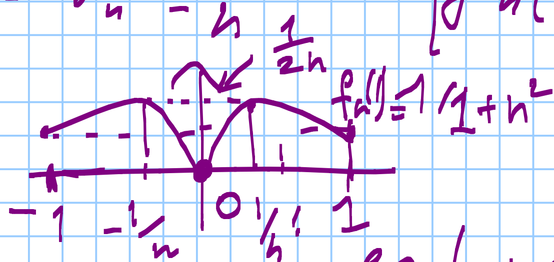
$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = ?$$

$$\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{1\cdot(1+n^2x^2) - x\cdot n^2 2x}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2n^2}{(1+n^2x^2)^2}$$ – la valeur extremum se trouve quand $1 - x^2n^2 = 0$

i.e. pour $x_n = \pm\dfrac{1}{n}$ $\quad \left|f_n(x_n)\right| = \left|\dfrac{\pm 1/n}{1+n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right| = \dfrac{1}{2n}$

$\dfrac{x}{1+n^2x^2}$



positive sur $[0,1]$

est négative sur $[-1,0]$

alors pour n fixé la valeur max de $\left|\dfrac{x}{1+n^2x}\right|$ sur $[-1,1]$ est $\boxed{\dfrac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par le thm 6. On a alors la conv. uniforme.

Exo 12 cv dominée

1. $u_n = \int_0^{\pi/4} [\tan x]^n \, dx$

Thm de convergence dominée :

(i) $(\tan x)^n$ - continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

(ii) $(\tan x)^n$ cv. simplement vers 1 si $x = \pi/4$ et vers 0 si $x \in [0, \frac{\pi}{4}[$ car $|\tan x| < 1$ pour $x \in [0, \pi/4[$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{\pi}{4} \\ 0, & x \in [0, \pi/4[\end{cases}$$ - continue par morceaux

(iii) hypothèse de domination :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x), \text{ où } \varphi(x) = 1$$

alors f_n et f sont absolument intégrables sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/4} [\tan x]^n dx = \int_0^{\pi/4} 0 \cdot dx = 0$$