Epreuve d'examen

Durée : 2 heures

L'énoncé comporte cinq problèmes indépendants, nécessitant l'usage de l'ordinateur. Sur la copie, écrire uniquement les réponses aux questions posées. Ne pas chercher à traiter tous les sujets.

Problème 1 : suite complexe

Dessiner grossièrement l'image de l'ensemble des nombres complexes c tels que la suite définie par $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^3 + c$ soit bornée.

Problème 2 : générateur de nombres aléatoires

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = 4x(1-x)$. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. Soit $(x_n)_n$ la suite de nombres réels définie par $x_0 = \frac{1}{10}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. On envisage de programmer un générateur de chiffres aléatoires en prenant pour u_n le premier chiffre après la virgule dans l'écriture décimale du nombre x_n. Donner les premières valeurs $u_0, \ldots, u_{10}$ ainsi obtenues.

3. Que pensez-vous d'un tel générateur de chiffres aléatoires ?

Problème 3 : modèle proie-prédateur

En l'an 2000, il y avait $x_0 = 7500$ harengs et $y_0 = 5000$ morues en mer d'Aral. Les morues se nourrissent de harengs, de sorte que : plus il y a de morues, moins il y a de harengs, mais aussi : moins il y a de harengs, moins il y a de morues etc.

1. Soient x_n, y_n les tailles respectives des populations de harengs et morues en l'an $2000+n$. On suppose qu'on a la loi d'évolution :

$$(L_1) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{27}{25}\, x_n - \dfrac{4}{25}\, y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{7}{50}\, x_n + \dfrac{21}{25}\, y_n \end{cases}$$

Que va-t-il se passer en 2019 ?

2. Quelles sont les valeurs de $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $y_\infty = \lim_{n\to\infty} y_n$?

3. On affine le modèle en prenant les formules :

$$(L_2) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{27}{25}\, x_n - \dfrac{4}{250000}\, x_n y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{7}{500000}\, x_n y_n + \dfrac{21}{25}\, y_n \end{cases}$$

Tend-on vers un équilibre écologique (x_∞, y_∞) ?

4. Pour affiner encore, on passe à un modèle continu en notant $x(t), y(t)$ les tailles respectives des populations de harengs et de morues à l'instant t. Posons $h = \frac{1}{50}$ et $x_n = x(nh)$, $y_n = y(nh)$. En approchant la dérivée $x'(t)$ par $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ (idem pour y), (L_2) se transforme en un système différentiel (S) que satisfont $x(t)$ et $y(t)$. Dessiner la courbe paramétrique $t \mapsto (x(t), y(t))$ solution de (S). Retrouve-t-on le résultat de la question 3 ?

Problème 4 : pendule forcé amorti

Le mouvement d'un pendule simple entretenu, avec frottement, est régi par une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\ddot{\theta} + k\,\dot{\theta} + \sin(\theta) = a\,\cos(\omega t) \tag{1}$$

où θ (fonction du temps t) est l'angle que fait le pendule avec la verticale, k est le coefficient de frottement, a (resp. ω) est l'amplitude (resp. la pulsation) de la force d'entraînement supposée sinusoïdale. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, le pendule est immobile en position verticale.

1. Pour les petites oscillations, on assimile d'habitude $\sin(\theta)$ à θ, d'où une équation différentielle linéaire en θ. Au voisinage de $t = 0$, calculer un équivalent de l'erreur commise ainsi sur $\theta(t)$ par rapport à la solution de (1) (utiliser `dsolve` avec l'option `series`).

2. On fixe désormais $k = \frac{1}{2}$, $\omega = \frac{2}{3}$ et on s'intéresse au mouvement du pendule pour les valeurs suivantes du paramètre a :

$$0.9\ ,\ 1.15\ ,\ 1.5$$

Dans chacun de ces trois cas, que pensez-vous du comportement du pendule à long terme (cycle limite, mouvement chaotique) ?

Problème 5 : analyse d'un jeu

Le jeu appelé *Chomp* se joue à deux avec des pions disposés en rectangle (figure 1). Chaque joueur, à tour de rôle, ramasse un pion ainsi que tous ceux qui se trouvent dans le quart de plan situé en dessous et à droite (figures 2 et 3). Le joueur qui ramasse le dernier pion en haut à gauche perd la partie.

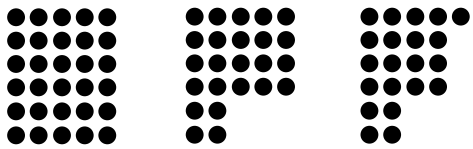

Figure 1 position de depart — Figure 2 apres un coup ... — Figure 3 apres deux coups, etc ...

On décrit une position par une suite d'entiers représentant le nombre de pions figurant dans chaque colonne. Par exemple, la position de la figure 3 est décrite par $(6, 6, 4, 4, 1)$.

1. Combien y a-t-il de positions possibles pour un jeu de Chomp à 6 lignes et 5 colonnes ?

2. Y a-t-il une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs ?

3. La position $(4, 4, 3, 3, 1)$ est-elle gagnante ou perdante ? Justifier.

***