Exercice 1

1. Evaluer l'expression : `product(X-r,r=RootOf(X^7-2,X))`.

2. A partir des polynômes $P = X^7 - 2$ et $Q = X^{17} - 3$, construire un polynôme ayant pour racines les nombres $r + s$ avec r racine de P et s racine de Q (s'inspirer de la question 1).

3. En déduire le polynôme minimal $H \in \mathbf{Z}[X]$ du nombre algébrique $\alpha = \sqrt[7]{2} + \sqrt[17]{3}$.

4. On peut aussi trouver H en éliminant formellement l'indéterminée X entre les deux équations polynômiales $X^7 - 2 = 0$ et $(Y - X)^{17} - 3 = 0$ (*expliquer pourquoi*). En déduire H en utilisant la commande `eliminate`.

Exercice 2

On veut répondre à la question suivante : de combien de façons peut-on vider un fût de 100 litres de bière à l'aide d'un demi ($\frac{1}{4}$ *de litre*)*, un sérieux* ($\frac{1}{2}$ *litre*) *et un formidable* (1 *litre*)*, sans tenir compte de l'ordre des opérations ?*

1. A la main :

a) Soit u_n le nombre de façons de vider un fût de n quarts de litres. Que valent u_1, u_2, u_3 ?

b) Montrer que u_n est le nombre de triplets d'entiers naturels (d, s, f) tels que $d + 2s + 4f = n$.

c) En déduire que u_n est le coefficient en X^n dans la série formelle :

$$\frac{1}{(1 - X)(1 - X^2)(1 - X^4)}$$

2. Avec Maple : conclure.

3. Trouver la formule de récurrence linéaire que vérifie la suite (u_n) (utiliser la fonction `rgf_findrecur` du package `genfunc`).

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n (utiliser `rsolve`). Vérifier pour $n = 400$.