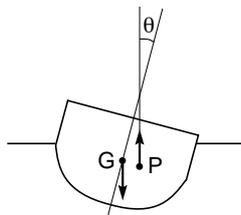


I.– Mouvement de roulis d'un navire

Un bateau qui gîte d'un angle θ a tendance à se redresser sous l'effet d'un couple de forces : son poids (appliqué au centre de gravité G) et la poussée d'Archimède (appliquée au centre de poussée P) :



La modélisation d'un tel système ¹ conduit à une équation différentielle non linéaire du type :

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \theta + \theta^2 = a \sin \omega t \quad (1)$$

où θ est fonction du temps et k, a, ω sont des constantes.

1. A quoi correspondent physiquement les trois termes $k\dot{\theta}$, $\theta + \theta^2$ et $a \sin \omega t$ figurant dans cette équation ?
2. Peut-on trouver une solution exacte de (1) avec `dsolve` ?
3. Pour la suite, on fixe $\omega = 0.85$, $k = 0.1$ et $a = 0.0752$. Résoudre numériquement l'équation différentielle (1) avec la condition initiale $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, et faire tracer la courbe $t \mapsto (\theta(t), \dot{\theta}(t))$. Le bateau est-il stable ?
4. Reprendre la question 3 avec la condition initiale $\theta(0) = 0.05$, $\dot{\theta}(0) = 0.03$. Que se passe-t-il ?

II.– Equation KdV

L'équation de *Korteweg-de Vries* est l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2)$$

1. Donner la solution générale $u(x, t)$ de cette équation (utiliser `pdsolve`).
2. Trouver une solution particulière $u_1(x, t)$ de (2) vérifiant les conditions initiales :

$$u_1(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0, 0) = -1.$$

3. Représenter en animation le graphe de $x \mapsto u_1(x, t)$ sur l'intervalle $[-10, 10]$, pour t variant de 0 à 5. L'onde progressive ainsi obtenue s'appelle un *soliton* ².

¹ M.S. Soliman & J.M.T. Thomson, *Transient and steady state analysis of capsizing phenomena*, Appl. Ocean Res., vol 13, pp. 82-92, 1991

² P.G. Drazin & R.S. Johnson, *Solitons : an introduction*, Cambridge (1992)