IFS et synthèse d'image

Une *transformation affine* T du plan fait correspondre à tout point M de coordonnées x, y le point $T(M)$ de coordonnées x', y' données par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$.

La donnée de n transformations affines $T_1, \ldots, T_n$ et de n nombres réels $p_1, \ldots, p_n$ strictement positifs et de somme 1 s'appelle un IFS (*Iterated Function System*).

Etant donné un IFS $(T_i, p_i)_{i=1 \text{ à } n}$, on considère la marche aléatoire dans le plan d'un point mobile qui part de l'origine et, à chaque itération, passe d'une position M à une position M' telle que :

$$M' \text{ a une probabilité } p_i \text{ d'être égal à } T_i(M), \text{ pour } i = 1 \text{ à } n.$$

1. Ecrire un algorithme qui, connaissant les p_i ($i = 1$ à n), produit un entier aléatoire $j \in [1, n]$ de telle sorte que pour $i = 1$ à n, la probabilité que $j = i$ soit égale à p_i.

2. En déduire un programme qui, étant donnés un IFS, trace dans une fenêtre graphique les images des positions successives occupées par le point mobile au cours de sa marche aléatoire (on affichera par exemple 5000 points).

3. Tester avec les IFS suivants :

1°) $T_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $T_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2)$,
$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$,
fenêtre : $[-2.5, 3.5] \times [-1.5, 3.5]$,

2°) $T_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $T_2 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 0)$, $T_3 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$,
$p_1 = p_2 = 0.33, p_3 = 0.34$,
fenêtre : $[-1, 3] \times [-0.5, 2.6]$,

3°)

	a	b	c	d	e	f
T_1	0	0	0	0.16	0	0
T_2	0.8492	0.0371	−0.0371	0.8492	0	1.6
T_3	0.1968	−0.2264	0.2264	0.1968	0	1.6
T_4	−0.15	0.2834	0.2598	0.2378	0	0.44

$p_1 = p_3 = p_4 = 0.1, p_2 = 0.7$,
fenêtre : $[-10, 10] \times [-3, 12]$.