1. Polynômes

Soient les polynômes $A = X^7 - 11X^3 + 5$ et $B = X^3 + 7X + 1$. On cherche un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 9 tel que $P + 1$ soit divisible par A et $P + 2$ soit divisible par B.

Première méthode : prendre P arbitraire, traduire le problème en équations (utiliser `rem` et `coeffs`) et résoudre.

Seconde méthode : Déterminer U et $V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + BV = 1$ (utiliser `gcdex`) et conclure.

2. Polynômes (bis)

Soient $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$ et $r_1, \ldots, r_n$ ses n racines dans $\mathbb{C}$. Le but de l'exercice est de trouver un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[X]$ dont les racines sont les $\frac{n(n-1)}{2}$ nombres $r_i + r_j$ où $1 \leq i < j \leq n$.

1. On prend d'abord $P = X^5 - 3\,X^3 + 2\,X^2 - 1$.
   a) Maple peut-il calculer les cinq racines $r_1, \ldots, r_5$ de ce polynôme ?
   b) Evaluer l'expression `product(X-r,r=RootOf(P,X))`.
   c) En s'inspirant de b), trouver un polynôme P_1 dont les racines sont les 25 nombres $r_i + r_j$ où $1 \leq i \leq 5$ et $1 \leq j \leq 5$, puis un polynôme P_2 dont les racines sont les 5 nombres $2\,r_i$ où $1 \leq i \leq 5$.
   d) En déduire le polynôme Q cherché (utiliser `psqrt`).
2. Donner l'expression générale de Q pour P polynôme unitaire arbitraire de degré 5.

3. Formule d'approximation de la dérivée

On cherche cinq nombres $a_1, \ldots, a_5$ tels que, pour toute fonction numérique f suffisamment régulière et tout point x_0, on ait (lorsque h est petit) :

$$f'(x_0) \approx \sum_{k=1}^{5} a_k \, \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0 - kh)}{h} \tag{1}$$

1. On note y le membre de droite de (1). Développer formellement l'expression $y - f'(x_0)$ par `taylor` à l'ordre 10 au voisinage de $h = 0$.

2. Trouver les valeurs de $a_1, \ldots, a_5$ qui annulent un maximum de coefficients de ce développement.

3. Tester *numériquement* la précision de la formule (1) obtenue (par exemple avec la fonction sinus en $x_0 = 1$).

4. Développement asymptotique

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note x_n l'unique solution de l'équation $x = \tan x$ appartenant à l'intervalle $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - n\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Calculer un développement asymptotique d'ordre 5 de x_n quand $n \to \infty$. *Indication* : on cherchera un développement de la forme :

$$x_n = n\,\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \frac{d}{n^4} + \frac{e}{n^5} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^5})$$

et on déterminera les coefficients a, b, c, d, e en se servant de l'équation $x_n = \tan x_n$.