

1. Algorithme de Fadeev

Soit M une matrice carrée complexe d'ordre n . On définit des suites (A_k) , (a_k) et (B_k) par récurrence, en posant :

$$A_1 = M, \quad a_k = \frac{1}{k} \operatorname{tr}(A_k), \quad B_k = A_k - a_k \mathbf{I}_n, \quad A_{k+1} = B_k M.$$

1. Partant de M , programmer le calcul de a_1, \dots, a_n .
2. Vérifier que le polynôme $P(X) = X^n - a_1 X^{n-1} - \dots - a_n$ est égal au polynôme caractéristique de M (utiliser la fonction prédéfinie `poly`).

2. Tabulation du sinus par différences finies

On se propose de calculer des valeurs approchées du sinus entre 0 et $\pi/2$, par pas de $h = 0.01$, avec la méthode des différences finies. Pour cela, on assimile sur $[0, \pi/2]$ la fonction sinus à une fonction polynômiale de degré 9.

1. On rappelle que la méthode consiste à calculer successivement les lignes du tableau :

$$\begin{array}{ccccccc} f(a) & \rightarrow & hf'(a) & \rightarrow & h^2 f''(a) & \dots & \\ & \nearrow & & \nearrow & & & \\ f(a+h) & \rightarrow & hf'(a+h) & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ f(a+2h) & & & & & & \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

Pour l'exemple considéré, on utilise un vecteur $v = (v_0, \dots, v_9)$ de dimension 10.

1. Initialiser le vecteur v avec les valeurs $v_i = h^i \sin^{(i)}(0)$ ($i = 0$ à 9).
2. A l'aide de v , programmer le calcul successif des valeurs de $\sin(ih)$ pour i allant de 1 à $\lfloor \pi/2h \rfloor$, en n'effectuant que des additions.
3. Contrôler graphiquement le résultat et estimer la précision.

3. Jeu de casino

Ce jeu était pratiqué autrefois aux Etats-Unis. Le joueur mise une certaine somme d'argent sur un numéro N compris entre 1 et 6, puis le croupier tire simultanément trois dés. Si le numéro N ne sort pas, le joueur perd sa mise ; si N sort 1, 2 ou 3 fois, le joueur récupère sa mise plus respectivement 1, 2 ou 3 fois sa mise. Par exemple, si le joueur mise 100 euros sur le numéro 4, avec le tirage (3, 1, 5) il perd ses 100 euros, avec le tirage (4, 6, 4), il récupère ses 100 euros plus 200 euros (son gain est finalement de 200 euros). Le joueur peut rejouer autant de fois qu'il veut, jusqu'à ce qu'il décide d'arrêter la partie.

1. On suppose que la stratégie du joueur consiste, à chaque coup, à miser aléatoirement une somme de 100, 200, 300, 400 ou 500 euros sur un numéro aléatoire (lois uniformes) et à jouer 10 coups de suite, sauf s'il a perdu au moins 1000 euros depuis le début de la partie, auquel cas il décide d'arrêter.

Ecrire une fonction simulant le déroulement d'une telle partie.

Algorithme :

```
initialiser le gain à 0
initialiser  $n$  à 1
tant que  $n$  est  $\leq 10$  et que le gain est  $> -1000$  faire
    choisir la mise et le numéro
    simuler le tirage des trois dés
    compter le nombre de bons numéros
    mettre à jour le gain
    incrémenter  $n$  de 1
fin du tant que
renvoyer comme résultat le gain final
```

2. Grâce à la cette fonction, simuler une centaine de parties puis afficher le gain moyen du joueur. Ce jeu vous paraît-il équitable pour le joueur ?

3. Pour un coup donné, soit X la variable aléatoire égale au nombre de bons numéros qui sortent aux dés (X vaut 0, 1, 2 ou 3). Identifier la loi de X . En déduire l'espérance de gain sur un coup, en fonction de la mise. La simulation de la question 2 est-elle conforme à l'espérance ?
