1. Bouteille de Klein

Tracer sur une même figure les quatre surfaces données par les équations paramétriques :

$$(S_1)\begin{cases} x = (2.5 + 1.5\ \cos(v))\ \cos(u) \\ y = (2.5 + 1.5\ \cos(v))\ \sin(u) \\ z = -2.5\ \sin(v) \end{cases} \qquad \text{pour } u \in [0, 2\pi] \text{ et } v \in [0, \pi],$$

$$(S_2)\begin{cases} x = (2.5 + 1.5\ \cos(v))\ \cos(u) \\ y = (2.5 + 1.5\ \cos(v))\ \sin(u) \\ z = 3\,v \end{cases} \qquad \text{pour } u \in [0, 2\pi] \text{ et } v \in [0, \pi],$$

$$(S_3)\begin{cases} x = 2 + (2 + \cos(u))\ \cos(v) \\ y = \sin(u) \\ z = 3\,\pi + (2 + \cos(u))\ \sin(v) \end{cases} \qquad \text{pour } u \in [0, 2\pi] \text{ et } v \in [0, \pi],$$

$$(S_4)\begin{cases} x = 2 - 2\ \cos(v) + \sin(u) \\ y = \cos(u) \\ z = 3\,v \end{cases} \qquad \text{pour } u \in [0, 2\pi] \text{ et } v \in [0, \pi].$$

2. Automate des tas de sable

Cet automate cellulaire modélise l'évolution d'un tas de sable très simplifié.

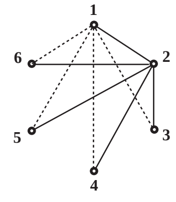
On se donne une grille carrée de taille $n \times n$ composée de cellules, représentant le tas de sable. Chaque cellule contient un certain nombre de grains de sable.

Le passage d'une génération à la suivante est régi par les règles suivantes :
- si une cellule contient 0, 1, 2 ou 3 grains de sable, elle est stable,
- si une cellule contient 4 grains ou plus, elle s'écroule et perd 4 grains de sable ; chacun de ces grains va s'ajouter à chacune des quatre cellules voisines (dans les directions horizontale et verticale), ou disparaître si on est au bord du tas.

Ecrire un programme demandant à l'utilisateur la dimension du terrain puis qui montre graphiquement l'évolution du tas génération après génération, jusqu'à ce que toutes les cellules soient stables. Au départ, on pourra mettre 6 grains de sable dans chaque cellule. Colorer les cellules en fonction du nombre de grains de sable qu'elles contiennent (0, 1, 2, 3 ou > 3).

3. Jeu de Sim

Ce jeu nécessite une feuille de papier et deux crayons de couleurs différentes. Sur la feuille sont marqués six points formant les sommets d'un hexagone régulier. Deux joueurs, munis chacun d'un crayon, tracent à tour de rôle un segment de droite joignant deux de ces sommets. Le premier joueur qui ferme un triangle unicolore reliant trois sommets a perdu. Par exemple, dans la situation ci-contre, celui qui joue perd la partie.



1. Ecrire un programme permettant à deux personnes de disputer une partie de Sim l'une contre l'autre. Le programme devra afficher le jeu, lire les coups successifs des joueurs, vérifier leur validité, détecter la fin de la partie et indiquer quel est le vainqueur.

Indication : on convient de représenter à chaque instant l'état du jeu par une *matrice d'adjacence* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 6}$ symétrique d'ordre 6, définie par :

$$\begin{array}{ll} a_{ij} = 0 & \text{si les sommets } i \text{ et } j \text{ ne sont pas reliés ou si } i = j, \\ a_{ij} = 1 & \text{si les sommets } i \text{ et } j \text{ sont reliés par le joueur n°1}, \\ a_{ij} = 2 & \text{si les sommets } i \text{ et } j \text{ sont reliés par le joueur n°2}. \end{array}$$

2. Peut-il y avoir des parties nulles ?

3. Y a-t-il une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs ?

***