Un attracteur étrange

Partie 1

Le mouvement d'un pendule simple entretenu, avec frottement, est régi par une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\ddot{\theta} + k\,\dot{\theta} + \sin(\theta) = a\,\cos(\omega t)$$

où θ (fonction du temps t) est l'angle que fait le pendule avec la verticale, k est le coefficient de frottement, a (resp. ω) est l'amplitude (resp. la pulsation) de la force d'entraînement supposée sinusoïdale. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, le pendule est immobile en position verticale.

Dans toute la suite, on prendra $k = \frac{1}{2}$ et $\omega = \frac{2}{3}$.

1. En posant $y_1 = \theta$ et $y_2 = \dot{\theta}$, écrire le système différentiel (S) du premier ordre que vérifient y_1 et y_2.

2. En déduire une fonction `yprime = sys_diff(t,y)` calculant le vecteur $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$ en fonction de t et du vecteur $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Partie 2

Soit $\varphi(t) = \omega t$ la phase de la force d'entraînement. Comme θ et φ sont définies modulo 2π, l'état du pendule à un instant donné est entièrement déterminé par un point $(\theta, \dot{\theta}, \varphi)$ de l'*espace des phases* $E = [-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$. La courbe $t \mapsto (\theta(t), \dot{\theta}(t), \varphi(t))$ s'appelle *trajectoire de phases*.

On s'intéresse à l'état asymptotique du pendule, qui est caractérisé par un *attracteur* c'est-à-dire une partie A de l'espace des phases vers laquelle tendent presque toutes les trajectoires de phases. Si le régime est chaotique, A est une fractale (on parle alors d'*attracteur étrange*).

3. Ecrire un programme qui trace une coupe (ou *section de Poincaré*) de A par un plan $\varphi = \varphi_0$, où $\varphi_0 \in [0, 2\pi[$ est une constante choisie par l'utilisateur. Le tracé se fera point par point, dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$, en intégrant le système (S) grâce à l'une des fonctions prédéfinies `ode45` ou `ode23s` de Matlab (*indications* : ne tracer qu'à partir d'un temps $t \geq 1000$, utiliser une fenêtre $[-\pi, \pi] \times [-3, 3]$).

4. A l'aide de ce programme, tracer les sections de Poincaré pour $a = 1.35$ (on obtient un point), pour $a = 1.45$ (on obtient 2 points), pour $a = 1.47$ (on obtient 4 points), pour $a = 1.5$ (on obtient une fractale).