Solution du TP sur les fractions continues

O. Marguin - 11 mai 2011

Exercice 1

```
> restart:
> with(numtheory):
> seq(cfrac(sqrt(k^2+1),'periodic','quotients'),k=1..10);
```

$$[[1], [2]], [[2], [4]], [[3], [6]], [[4], [8]], [[5], [10]], [[6], [12]], [[7], [14]], [[8], [16]], [[9], [18]], [[10], [20]]$$

Il semble que, pour tout entier $n > 0$, le développement en fraction continue de $\sqrt{n^2+1}$ soit égal à $(n, 2\,n, 2\,n, 2\,n, \ldots)$.

Pour le démontrer, il suffit de vérifier que l'on a $\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{x}$ où x est solution de l'équation $x = 2\,n + \frac{1}{x}$:

```
> s:=solve(x=2*n+1/x,x);
```

$$s := n + \sqrt{n^2+1},\ n - \sqrt{n^2+1}$$

On ne retient que la solution positive s[1].

```
> simplify(sqrt(n^2+1)-n-1/s[1]);
```

$$0$$

CQFD !

Exercice 2 : approximants de Padé

```
> restart:
> Pade:=proc(expr,x,k)
     local S,a,n,z;
     S:=convert(series(expr,x=0,20),polynom);
     a:=coeff(S,x,0);
     n:=ldegree(S-a,x);
     if k=0 then return a
     else
        z:=convert(series(x^n/(expr-a),x=0,20),polynom);
        return a+x^n/(Pade(z,x,k-1))
     end if
  end proc:
> P:=Pade(tan(x),x,4); normal(P);
```

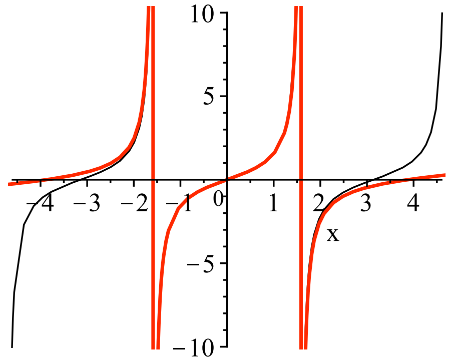
$$P := \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{-3 + \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7}}}}$$

$$-\frac{5\,x\left(-21 + 2\,x^2\right)}{105 - 45\,x^2 + x^4}$$

```
> s:=seq(Pade(tan(x),x,k),k=0..5);
```

$$s := 0,\ x,\ \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3}},\ \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{-3 + \cfrac{x^2}{5}}},\ \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{-3 + \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7}}}},\ \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{-3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{-7 + \cfrac{x^2}{9}}}}}$$

```
> plot([tan(x),s[4]],x=-10..10,color=[black,red],thickness=
  [1,2],view=[-4.6..4.6,-10..10]);
```



On obtient une bonne approximation de la fonction tangente, même au voisinage des premiers pôles.