Fractions continues — Exercices

Exercice 1

1. Pour quelques valeurs de $n \in \mathbf{N}^\star$, calculer le développement en fraction continue de $\sqrt{n^2+1}$ (on pourra utiliser la fonction `cfrac` du package `numtheory`).

2. En déduire la forme générale du développement en fraction continue de $\sqrt{n^2+1}$ pour $n \in \mathbf{N}^\star$.

Exercice 2 : approximants de Padé

Soit f une fonction numérique développable en série entière au voisinage de 0. Par analogie avec le développement en fraction continue des nombres réels, on cherche à écrire f sous la forme :

$$f(x) = a_0 + \cfrac{x^{n_1}}{a_1 + \cfrac{x^{n_2}}{a_2 + \cfrac{x^{n_3}}{a_3 + \cdots}}} \tag{1}$$

où $a_0 \in \mathbf{R}$ et, pour $i \geq 1$, $a_i \in \mathbf{R}^\star$ et $n_i \in \mathbf{N}^\star$. On appelle *approximant de Padé d'indice k de f* la fraction rationnelle obtenue en tronquant (1) à l'indice k :

$$P_{k,f}(x) = a_0 + \cfrac{x^{n_1}}{a_1 + \cfrac{x^{n_2}}{a_2 + \cfrac{x^{n_3}}{\cdots + \cfrac{x^{n_k}}{a_k}}}}$$

1. Ecrire une procédure donnant l'approximant de Padé d'indice k d'une fonction, s'il existe.

2. Tester avec la fonction tangente. Pour vérification :

$$P_{4,\tan}(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{-3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{-7}}}} = \frac{-10\,x^3 + 105\,x}{x^4 - 45\,x^2 + 105}$$

3. Comparer le graphe de la fonction tangente avec les graphes de ses approximants de petits indices (on constatera qu'on obtient une bonne approximation même au voisinage des pôles, ce qui aurait été impossible avec une approximation polynômiale).