

## Sujet 8.3

26 novembre 2009

### 1 Amuse-gueule

1. Exprimer le plus petit entier supérieur au réel  $x$  à l'aide de la fonction partie entière.
2. Soit  $F$  une partie bornée de  $\mathbb{R}$ . Est-il vrai que

$$\sup F = \inf \{C \mid \forall x \in F, C \geq x\}?$$

### 2 Plat

Soit  $E$  un ensemble fini ; calculer :

1.  $\sum_{X \subset E} \text{card}(X)$
2.  $\sum_{X, Y \subset E} \text{card}(X \cap Y)$
3.  $\sum_{X, Y \subset E} \text{card}(X \cup Y)$

### 3 Dessert

Soit  $a \in \mathbb{Q}^+$  tel que  $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ .

Montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout rationnel  $r = \frac{p}{q}$ , on a :

$$|r - \sqrt{a}| \geq \frac{C}{q^2}$$

.

### 4 Resucée

<http://francoise.bienvenu.perso.neuf.fr>