

## Sujet 8.4

26 novembre 2009

### 1 Amuse-gueule

Soit  $n$  et  $p$  deux entiers strictement positifs. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^k = (-1)^p C_{n-1}^p$$

### 2 Plat

On définit sur  $\mathbb{R}^2$  :  $(x, y) \ll (x', y') \iff |x' - x| \leq y' - y$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple  $(a, b)$ .
3. L'ordre est-il total ?
4. Soit  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Déterminer  $\sup(A)$ .

### 3 Dessert

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :  $\left[ \frac{a}{b} \right] + \left[ \frac{a+1}{b} \right] + \dots + \left[ \frac{a+b-1}{b} \right] = [a]$ .  
(commencer par  $a$  entier)

### 4 Resucée

<http://francoise.bienvenu.perso.neuf.fr>