

# Sujet 9.3

1<sup>er</sup> décembre 2009

## 1 Amuse-gueule: Vrai ou faux ?

Soient  $A$  et  $B$  deux parties bornées non vides de  $\mathbb{R}$

1.  $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$  et  $\inf A \leq \inf B$
2.  $\inf A \cup B = \inf(\inf A, \inf B)$
3.  $\sup A \cup B = \sup(\sup A, \sup B)$

## 2 Plat

On va étudier les morphismes de corps de  $\mathbb{R}$  (une application telle que  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  et  $f(xy) = f(x)f(y)$  et ce pour tous  $x, y$ )... Sensation garantie !

1. Déterminer  $f$  sur  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
2. Montrer que  $f$  est croissante... et conclure.

## 3 Dessert

On va montrer qu'une fonction croissante de  $[0,1]$  dans lui-même admet un point fixe ! Pour cela, considérer  $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) > x\}$  et vérifier par l'absurde que sa borne sup éventuelle convient.

Et pour les fonctions décroissantes ?

## 4 Resucée

<http://francoise.bienvenu.perso.neuf.fr>