Soit $l \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire d'une suite u dont une infinité de termes se trouvent dans $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$?
On va montrer que u admet une suite extraite convergeant vers l. On cherche à construire φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers l.
On suppose $\varphi(n)$ construit. Construisons $\varphi(n+1)$
On sait qu'il existe une infinité d'indices k tels que u_k soit dans $[l-\frac{1}{n}, l+\frac{1}{n}]$.
Il y a donc forcément un tel k qui soit supérieur à $\varphi(n)$: on l'appelle $\varphi(n+1)$.
Y a plus qu'à vérifier que c'est bon.

Réciproquement, si une suite admet une suite extraite convergente, elle vérifie aussi cette propriété. Donc nous avons caractérisé les suites qui admettent une sous suite convergeant vers l :-).