Sujet 11.2

15 décembre 2009

Montrer que la suite $(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
(je vire $k=0$ et $n=0$ par précaution).
Evident puisque $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$. La somme des n termes vérifie :

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Reste à appliquer le théorème d'existence de limites par encadrement pour trouver que la suite converge vers 1.
Un argument du type "c'est une somme de termes qui tendent tous vers 0 quand n tend vers l'infini" est à exclure, d'abord parce qu'il n'y aucun théorème du cours qui permet de conclure automatiquement quand le nombre de termes tend vers l'infini, d'autre part parce que c'est faux.
Exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$$

qui a du mal à converger (surtout pas vers 0).