

Sujet 12.3

Pierre-Yves Bienvenu - <http://eleves.ens.fr/~bienvenu>

12 janvier 2009

1 Amuse-gueule

Dérivée nième de la fonction $\mapsto x^n(1-x)^n$

2 Plat

Une formule terriblement utile Soit f de classe \mathcal{C}^n et $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Application : sur tout \mathbb{R} , $x - x^3/6 \leq \sin x \leq x$

Moins utile mais bon... Si $x \neq 0[\pi]$, montrer que

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

En déduire les fonctions définies sur \mathbb{R} continues en 0 telles que $f(2x) = f(x)$.

3 Dessert

Comment s'infliger un dénivelé total infini sur un trajet d'1 m d'altitude bornée ?

4 Café historique



William Young
(1863-1942)



Brook Taylor
(1685-1731)



Michel Rolle
(1652-1719)



Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)