

# Sujet 13.1

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

19 janvier 2009

## 1 Amuse-gueule

1. Soit  $a < b$  deux réels. Existe-t-il une fonction continue sur  $\mathbb{R}$   $f$  telle que

$$f(x) \neq 0 \iff x \in [a, b]$$

2. Soit  $f$  une fonction bornée sur  $\mathbb{R}$  dont la dérivée admet une limite en  $+\infty$ . Que peut-on dire ?

## 2 Plat

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tous  $x, y$ ,

$$f(x+y)f(x-y) \leq f(x)^2$$

Prouver que pour tout  $x$ ,  $f(x)f''(x) \leq f'(x)^2$

## 3 Dessert

1. Citez une fonction non continue qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
2. REMARQUABLE : si une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est injective, alors elle est continue.

## 4 Café historique

		
Gaston Darboux	Bernard Bolzano	Karl Weierstrass
1842-1917	1781-1848	1815-1897