

## Sujet 15.2

02/02/10

### Amuse-bouche (Quelques questions en vrac sur les développements limités)

1. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\ln(1/\cos x)$
2. Vrai ou faux ? Si  $f$  admet à tout ordre un développement limité en 0 dont la partie régulière est impaire, alors  $f$  est impaire.

### Plat

Soit  $a, b \geq 0$  tels que  $a+b = 1$ . Montrer que pour tous réels positifs  $x$  et  $y$ , on a :  
$$1 + x^a y^b \leq (1+x)^a (1+y)^b$$

### Dessert

Soit  $P, Q$  deux polynômes à coefficients réels, non constants, de coefficients dominants positifs. On note  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$  les racines de  $P'$  de multiplicités  $m_1, \dots, m_p$  et  $y_1 < y_2 < \dots < y_q$  celles de  $Q'$  de multiplicités  $n_1, \dots, n_q$ .

On suppose qu'il existe  $f$  fonction de classe  $C^1$  croissante bijective de  $R$  sur  $R$ , de réciproque également de classe  $C^1$  telle que  $P \circ f = Q$ .

Montrer que :

1.  $p = q$
2. Pour tout  $i$ ,  $P(x_i) = Q(y_i)$
3. Pour tout  $i$ ,  $m_i = n_i$

Remarque : Les conditions 1, 2 et 3 entraînent réciproquement l'existence d'une telle fonction  $f$ , mais cette réciproque est plus difficile à établir.