Sujet 15.4

02/02/10

Amuse-bouche

Limite en $+\infty$ de x((1+2/x)$^x - (1+1/x)^{2x}$).

Plat

On définit une suite (u_n) par $u_o \in \mathbf{R}_+$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer qu'on peut choisir u_0 pour que (u_n) soit décroissante et converge vers 0. On supposera cette condition vérifiée par la suite.

2. Soit $\beta > 0$, on pose $x_n = \frac{1}{u_{n+1}^{\beta}} - \frac{1}{u_n^{\beta}}$.

Trouver un équivalent de (x_n).

3. En choisissant judicieusement β, trouver un équivalent de (u_n). (On rappelle que si (v_n) converge vers l, alors il en est de même de $(\frac{v_1+v_2+...+v_n}{n})$)

Dessert

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x_1, ..., x_n \in \mathbf{R}_+^*$.

1. Montrer que $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1...x_n} \leq \frac{x_1+...+x_n}{n}$.

2. Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.