

Sujet 17.2

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

19 février 2010

1 Amuse-gueule : vrai ou faux ?

1. $\mathbb{K}[X]$ est un corps.
2. Si une application linéaire f injective de E dans F , E et $\text{Im } f$ sont isomorphes.
3. \mathbb{R} est un \mathbb{Q} EV.

2 Plat

On pose

$$\begin{aligned}A_n &= \{\text{fonctions } f \mid \exists P \in \mathbb{R}_n[X] : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)e^x\} \\B_n &= \{\text{fonctions } f \mid \exists P \in \mathbb{R}_n[X] : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)e^{-x}\}\end{aligned}$$

Montrer que ce sont des \mathbb{R} espaces vectoriels de dimension finie à déterminer.
Déterminer leur somme.

3 Dessert pittoresque

Soit P un polynôme à coefficients entiers, défini sur \mathbb{Z} seulement qui prend à quatre reprises au moins la valeur 7. Montrer qu'il ne prend pas la valeur 14.

4 Café historique