

# Sujet 18.3

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

15 mars 2010

## 1 Amuse-gueule : vrai ou faux ?

1. Une forme linéaire non nulle est surjective.
2. Pour toute application linéaire  $f$ ,  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.
3. Démonstration de cours : théorème de la base incomplète.

## 2 Plat

Soit  $E$  un EV de dimension finie, soit  $\phi$  et  $\psi$  deux endomorphismes tels que

$$E = \text{Im } \phi + \text{Im } \psi = \ker \phi + \ker \psi$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

## 3 Dessert

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on note  $V(x)$  le nombre de changements de signe dans la suite  $(P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x))$  en convenant de retirer les termes nuls. Soient  $\alpha < \beta$  deux réels non racines de  $P$ .

Montrer que le nombre de racines de  $P$  dans  $[\alpha, \beta]$ , comptées avec leur ordre de multiplicité, a même parité que  $V(\alpha) - V(\beta)$  et que  $V(\alpha) - V(\beta) \geq 0$

## 4 Café historique

			
Giusto Bellavitis	William Rowan Hamilton	Hermann Günther Grassmann	Arthur Cayley
1803-1880	1805-1865	1809-1877	1821-1895