

Sujet 18.3

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

15 mars 2010

1 Amuse-gueule : vrai ou faux ?

1. Une forme linéaire non nulle est surjective.
2. Pour toute application linéaire f , $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.
3. Démonstration de cours : théorème de la base incomplète.

2 Plat

Soit E un EV de dimension finie, soit ϕ et ψ deux endomorphismes tels que

$$E = \text{Im } \phi + \text{Im } \psi = \text{Ker } \phi + \text{Ker } \psi$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.




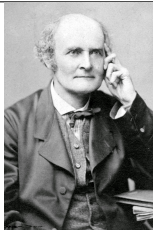
3 Dessert

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $V(x)$ le nombre de changements de signe dans la suite $(P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x))$ en convenant de retirer les termes nuls. Soient $\alpha < \beta$ deux réels non racines de P .

Montrer que le nombre de racines de P dans $[\alpha, \beta]$, comptées avec leur ordre de multiplicité, a même parité que $V(\alpha) - V(\beta)$ et que $V(\alpha) - V(\beta) \geq 0$

4 Café historique

			
Giusto Bellavitis 1803-1880	William Rowan Hamilton 1805-1865	Hermann Günther Grassmann 1809-1877	Arthur Cayley 1821-1895