

## Sujet 19.3

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

26 mars 2010

### 1 Amuse-gueule

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $a_{i,j} = (-1)^{i+j}$ . Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .



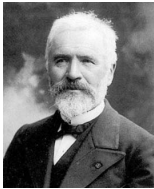

### 2 Plat

1. Dans  $E$  de dimension  $n$ , soit un endomorphisme  $\phi$  tel que  $\phi^n = 0$  mais pas  $\phi^{n-1}$ . Montrer que si  $u_0$  est bien choisi,  $(u_0, \phi(u_0), \dots, \phi^{n-1}(u_0))$  est une base de  $E$ .
2. En déduire que les endomorphismes qui commutent avec  $\phi$  sont les éléments de  $\text{Vect}(\text{id}, \phi, \dots, \phi^{n-1})$ .

### 3 Dessert

Etablir ce résultat formidable : toute matrice de rang 1 est une colonne multipliée par une ligne (non nulles) et réciproquement.

### 4 Café historique

Gottfried von Leibniz	Gabriel Cramer	Camille Jordan	Carl Friedrich Gauss
			
1646-1716	1704-1752	1838-1922	1777-1855