Sujet 21.2

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

9 avril 2010

1 Menu spécial : et e surgit...

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0, f(1) = 1\}$. Visiblement, e n'a rien à voir avec cette histoire. Sauf que... On va démontrer que pour $f \in E$: $\int_{[0,1]} \mid f' - f \mid \geq \frac{1}{e}$

1.1 L'inégalité étrange

1. Soit g une fonction réelle continue sur [0,1]. Décrire à l'aide d'une intégrale les solutions de l'ED $y' - y = g$.
2. Soit $f \in E$, et $g = f' - f$. Prouver que $\int_0^1 e^{-t} g(t) dt = \frac{1}{e}$.
3. Obtenir l'inégalité. Cas d'égalité ?

1.2 Peut-on faire mieux ?

1. Pour n entier ≥ 2, on définit :

$$f_n(t) = \begin{cases} n(2t - nt^2)e^{t-1} & \text{si} t \in 0, 1/n[\\ e^{t-1} & \text{si} t \in [1/n, 1 \end{cases}$$

   Montrer que f_n est dans E
2. On pose $I_n = \int_{[0,1]} \mid f_n' - f_n \mid$. Montrer que $I_n = \frac{2}{e} \int_0^1 (1-x) e^{x/n} dx$.
3. En déduire qu'I_n converge vers une limite à calculer. Conclure.

2 Café historique

Augustin-Louis Cauchy	Hermann Amandus Schwarz	Bernhard Riemann	Rudolf Lipschitz
			
1789-1855	1843-1921	1826-1866	1832-1903