Sujet 21.3

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

9 avril 2010

1 Amuse-gueule

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\int_{[0,1]} f = 1/2$. Montrer que f admet un point fixe sur l'ouvert (ie un point c tq $f(c) = c$.

Correction Considérer la fonction $x \mapsto f(x) - x$: elle est continue et d'intégrale nulle. Si elle ne s'annulait pas sur l'intervalle, elle y serait strictement positive ou strictement négative. Absurde !

2 Plat

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}(\mathbb{R})$, et $a < b < c$. Montrer que

$$\frac{1}{c-a}\int_{[a,c]} f \leq \max\left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f, \frac{1}{c-b}\int_{[b,c]} f)\right)$$

Correction On peut par exemple montrer que la moyenne sur l'intervalle total est un barycentre des deux moyennes sur les petits intervalles, pour une pondération bien choisie.

3 Dessert

Soit $a < b$ deux nombres réels. On pose $\phi_x : t \mapsto |t - x|$. Montrer que $(\phi_x)_{x\in[a,b]}$ est une base de l'EV Edes fonctions continues et affines par morceaux sur $[a, b]$.

Correction Voilà qui est intéressant ! Plusieurs remarques :

Qu'est-ce qu'une base infinie ? C'est une famille...
- libre : toute sous-famille **finie** est libre
- génératrice : tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire **d'un nombre fini** de ϕ_x. Càd :

$$\forall f \in E, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (x_1, ..., x_n), \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{x_i}$$

Qu'est-ce que c'est que cet espace ? Une fonction affine par morceaux et globalement continue sur [a,b], c'est une fonction dont le graphe est une ligne brisée en un certain nombre n points mais continue :

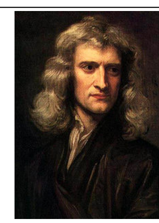
$f \in E \Longleftrightarrow f$ est continue et $\exists n \in \mathbb{N}, \exists (x_0 = a, x_1, ..., x_n, x_{n+1} = a)$: f est affine sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$

On peut même remarquer que E est la réunion d'une suite croissante d'EV E_n, E_n étant l'EV des fonctions continues et affines par morceaux brisées en **au plus** n points.
On peut y voir une analogie avec $K[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$!

Démonstration
– Famille libre : à faire.
– Famille génératrice : soit f $\in E$, soit n son nombre de brisures $x_1, \ldots, x_n$ ($f \in E_n$). Alors f est caractérisé par ses valeurs aux points x_i ! Bah oui, si j'impose l'ordonnée aux brisures, ma ligne devant être droite entre deux brisures, je n'ai plus de choix.

  Ceci nous incite à construire un isomorphisme $E_n \to \mathbb{R}^{n+2}$, $f \mapsto (f(a), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(b))$. D'après ce qui précède, cette application est bien injective. Il est assez facile de se convaincre de sa linéarité. Quant à la surjectivité, elle découle du fait qu'il existe bel et bien une ligne se brisant en n points quelconques, sans se briser ailleurs.
  E_n est donc de dimension $n+2$. Or, $(\phi_a, \phi_{x_1}, \ldots, \phi_{x_n}, b)$ est une famille libre appartenant à E_n, donc génératrice de E_n.Notre fonction f s'écrit alors comme combinaison linéaire de ces fonctions.

4 Café historique : le calcul intégral au 17è siècle

Christiaan Huygens	Jean Bernoulli	Gottfried Wilhelm von Leibniz	Isaac Newton
			
1629-1695	1667-1748	1646-1716	1642-1727