Sujet 22.2

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

16 avril 2010

1 Amuse-gueule

Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,a],\mathbb{R})$ avec $f(0)=0$. On note $I=\int_0^a |ff'|$ et F la primitive de $|f'|$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que $I \leq \frac{F(a)^2}{2}$.

   Correction Constater que $|f'|=F'$, $|f(x)|=\int_0^x f'(t)dt| \leq F(x)$, ce qui donne $I \leq \int_0^a F(t)F'(t)dt = F(a)^2/2$.

2. Puis que $I \leq \frac{a}{2}\int_0^a f'^2$.

   Correction Une vulgaire inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\int f' \times 1)^2 \leq \int 1 \int f'^2$

2 Plat

Trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

Correction Poser $u=\sqrt{1+e^x}$ et dérouler !

3 Dessert dégoûtant

Calculer

$$I=\int_{1+\sinh 1}^{1+\sinh 2} \frac{dx}{x-2+\sqrt{x^2-2x+2}}$$

.

Correction Arf ! Accrochez-vous.

1. $\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-1)^2+1}$ ce qui donne envie de poser le changement de variable $x-1=\sinh t$ ($\sqrt{\sinh^2 t+1}=\cosh t$). Ça donne

$$I=\int_1^2 \frac{\cosh t\,dt}{\sinh t-1+\cosh t}=\int_1^2 \frac{\cosh t\,dt}{e^t-1}$$

2. Maintenant on veut poser $u = e^t$. Ça donne

$$I = \int_e^{e^2} \frac{(u^2+1)du}{2u^2(u-1)}$$

3. De toute façon on a atteint le stade fraction rationnelle donc on est déjà ravi. On sépare en deux parties et on décompose en éléments simples la deuxième partie.

4 Café historique

Augustin-Louis Cauchy	Hermann Amandus Schwarz	Bernhard Riemann	Rudolf Lipschitz
			
1789-1855	1843-1921	1826-1866	1832-1903