

Sujet 22.3

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

16 avril 2010

1 Amuse-gueule

Cas d'égalité dans l'"inégalité triangulaire intégrale" pour des fonctions continues ?

Correction Ce sont les fonctions positives et les fonctions négatives. Par exemple si je suppose $\int |f| = \int f$, $|f| - f$ est continue, positive d'intégrale nulle donc nulle donc OK.

2 Plat

Primitive de $x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{2 + \sin 2x}$.

Correction $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$ donc faire le changement de variable $u = x + \pi/4$, ce qui donne $\int \frac{\sin u du}{2 - \cos 2u}$, puis $\int \frac{\sin u du}{3 - 2 \cos^2 u}$. Le changement de variable $t = \cos u$ est inévitable. Il donne : $\int \frac{dt}{3 - 2t^2}$. Cette brave fraction rationnelle ne devrait pas résister longtemps.

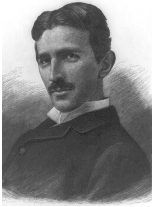
3 Dessert

Soit une fonction continue telle que $\int_{[0,\pi]} f \cos = \int_{[0,\pi]} f \sin = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur l'ouvert.

Correction Déjà, f s'annule une fois, parce que sinon, elle est de signe constant, donc $f \times \sin$ aussi, et la deuxième intégrale ne fait pas 0.

Supposons que f s'annule une seule fois (et en changeant de signe bien sûr, sinon ça marche pas, cf ci-dessus), en α . Alors $f(x) \sin(x - \alpha)$ est de signe constant ! Oui mais $\int f(x) \sin(x - \alpha) = \cos \alpha \int f(x) \sin x - \sin \alpha \int f(x) \cos x = 0$. Contradiction.

4 Café historique : quelques électromagnéticiens célèbres

			
Charles de Coulomb	Nikola Tesla	Carl Friedrich Gauss	André-Marie Ampère
1736-1806	1856-1943	1777-1855	1775-1836