

Sujet 22.4

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

16 avril 2010

1 Amuse-gueule

Equivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + (n-k)^2}$.

2 Plat - dessert

1. Montrer l'égalité de la moyenne (une fonction continue sur un segment atteint sa moyenne).
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, strictement croissante, nulle en 0. Rappeler pourquoi elle réalise une bijection sur son image.

On veut montrer que

$$\int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} = xf(x)$$

3. Constater que c'est évident pour f dérivable, ce qu'on ne suppose plus par la suite.
4. On note $w(x) = \int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} - xf(x)$.
En utilisant la formule de ma moyenne, trouver une formule concernant $\frac{w(x+h)-w(x)}{h}$.
5. Prouver que f est dérivable et en profiter pour conclure.
6. Et puis prouver, quand cela a un sens : $\int_0^x f + \int_0^y f^{-1} \geq xy$.

3 Café historique : le calcul intégral au 17^e siècle

Christiaan Huygens	Jean Bernoulli	Gottfried Wilhelm von Leibniz	Isaac Newton
			
1629-1695	1667-1748	1646-1716	1642-1727