Sujet 22.4

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

16 avril 2010

1 Amuse-gueule

Equivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+(n-k)^2}$.

2 Plat - dessert

1. Montrer l'égalité de la moyenne (une fonction continue sur un segment atteint sa moyenne).
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, strictement croissante, nulle en 0. Rappeler pourquoi elle réalise une bijection sur son image.
   On veut montrer que
   $$\int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} = xf(x)$$
3. Constater que c'est évident pour f dérivable, ce qu'on ne suppose plus par la suite.
4. On note $w(x) = \int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} - xf(x)$.
   En utilisant la formule de la moyenne, trouver une formule concernant $\frac{w(x+h)-w(x)}{h}$.

   Correction $\frac{w(x+h)-w(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f}{h} + \frac{\int_{f(x)}^{f(x+h)} f^{-1}}{h} - \frac{(x+h)f(x+h)-xf(x)}{h}$ Il existe θ_1, θ_2 dans $[0,1]$ tel que
   - le premier terme fasse $f(x+\theta_1 h)$
   - le deuxième fasse $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} f^{-1}(f(x)+\theta_2(f(x+h)-f(x)))$

   soit
   $$\frac{w(x+h)-w(x)}{h} = f(x+\theta_1 h) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\left(f^{-1}(f(x)+\theta_2(f(x+h)-f(x)))-x\right) - f(x+h)$$
5. Prouver que w est dérivable et en profiter pour conclure.

Correction

$$\left|\frac{w(x+h)-w(x)}{h}\right| \leq |f(x+\theta_1 h)-f(x+h)|+\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\left|\left(f^{-1}(f(x)+\theta_2(f(x+h)-f(x)))-x\right)\right|$$

Quand h tend vers 0, comme θ_1 est borné, le premier terme tend vers 0. De plus, comme $f(x)+\theta_2(f(x+h)-f(x)) \in [f(x), f(x+h)]$ ou $[f(x+h), f(x]$ selon le signe de h, par croissance de f^{-1} :$f^{-1}(f(x)+\theta_2(f(x+h)-f(x))) \in [x, x+h]$ou $[x+h, x] puis \left|\left(f^{-1}(f(x)+\theta_2(f(x+h)-f(x)))-x\right)\right| \leq |h|$

Au bout du compte,

$$\left|\frac{w(x+h)-w(x)}{h}\right| \longrightarrow 0$$

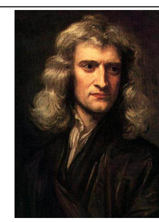
. Donc w est dérivable, de dérivée nulle. La voilà constante, donc nulle, car nulle en 0.

Donc c'est gagné !

6. Et puis prouver, quand cela a un sens : $\int_0^x f + \int_0^y f^{-1} \geq xy$.

Correction Facile, dériver cette fonction de y et étudier.

3 Café historique : le calcul intégral au 17è siècle

Christiaan Huygens	Jean Bernoulli	Gottfried Wilhelm von Leibniz	Isaac Newton
			
1629-1695	1667-1748	1646-1716	1642-1727