Sujet 25.3

Pierre-Yves Bienvenu - http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu

28 mai 2010

1 Amuse-gueule

Montrer que la rotation ϕ d'angle θ, d'axe dirigé par $\overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^3$ vérifie

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3, \phi(\overrightarrow{u}) = (1-\cos\theta)\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} + \cos\theta \overrightarrow{u} + \sin\theta(\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u})$$

2 Plat : vers l'analyse complexe

Bien entendu, une fonction à valeur complexe d'une variable complexe peut être considérée comme une fonction de deux variables réelles. On se permet l'abus de notation $f(x+iy) = f(x,y)$. On note $p = Ref(f), q = Im(f)$
Question : quand est-ce que f est dérivable comme fonction de z (on dit *holomorphe*) ? C'est-à-dire est-ce que

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

a une limite quand z tend vers z_0 ?

1. Montrer que f est holomorphe si et seulement si elle est de classe C^1 et $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$.
2. Montrer que les polynômes sont des fonctions holomorphes, que l'exponentielle aussi.
3. Citer une application de classe C^1 non holomorphe.

3 Dessert

Déterminer les bornes de l'expression $(x|y)+(y|z)+(z|x)$ quand x, y, z se promènent sur la sphère unité d'un espace euclidien E.