# Ultime colle de maths : inégalité isopérimétrique

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

04 juin 2010

Je vous donne une corde de longueur $L$. Ne vous pendez pas, dites-moi quelle est l'aire maximale que vous pouvez délimiter avec (sentimentalement).

## 1 Amuse-gueule

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $2\pi$-périodique, de moyenne nulle.

1. Justifier l'existence de $\alpha \in [0,\pi[$ tel que $f(x+\alpha) = f(x)$.
2. Montrer que $g(x) = (f(x) - f(\alpha))\cot(x-\alpha)$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,2\pi]$.
3. Montrer que $h(x) = (f(x) - f(\alpha))^2\cot(x-\alpha)$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[0,2\pi]$. Exprimer $h'$.

## 2 Plat : inégalité de Poincaré

1. A l'aide de $h'$, prouver que
$$\int_{[} 0,2\pi](f-f(\alpha))^2 = \int_{[} 0,2\pi]2f'g-g^2$$
puis que
$$\int_{[} 0,2\pi](f'-g)^2 = \int_{[} 0,2\pi](f'^2-(f-f(\alpha))^2).$$
2. Etablir que $\int_{[} 0,2\pi]f^2 \leq \int_{[} 0,2\pi]f'^2$.
Et en période quelconque ?

## 3 Dessert

C'est maintenant que ça commence vraiment. Soit une courbe $\mathscr{C}^1$ de longueur $L$, fermée, paramétrée par l'abscisse curviligne. On admet (formule de Green-Riemann) que l'aire qu'elle délimite est

$$\mathscr{A} = \int xy'$$

1. Préciser ce que tout cela signifie. Vérifier sur l'exemple du cercle que cette formule de l'aire n'est pas sotte.
2. Prouver que $L - \frac{4\pi}{L} \geq \int_{[} 0,L](\frac{2\pi}{L}x - y')^2$.
3. Conclure !

## 4 Café historique

| Jean-Frédéric Frenet | Guido Fubini | Henri Poincaré |
|---|---|---|
| |  |  |
| 1816-1900 | 1876-1943 | 1854-1912 |