

Toute première colle de maths ! Sujet 01.3

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

Vendredi 24 septembre 2010

1 Amuse-gueule : vrai ou faux ?

1. Pour toute application bijective u , $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u$.
2. Soit E un ensemble, $\forall u \in E^E, \forall v \in E^E, u \circ v = \text{id}_E \Rightarrow u$ et v sont bijectives et $u = v^{-1}$

2 Plat

Résoudre l'équation

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

3 Dessert

Soit E, F des ensembles. Déterminer les applications $f : E \rightarrow F$ telles que

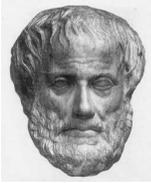
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

puis celles telles que

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B).$$

4 Café historique : logique, ensembles, applications

Pour vous, comme pour tous les mathématiciens jusqu'au XIX^e siècle, ensemble est une *notion première*. Tout est ensemble. Mais la découverte de paradoxes effroyables a conduit à restreindre la notion d'ensembles. La notion première s'appelle alors collection ; on définit alors les ensembles par des axiomes, la plupart du temps ceux de Zermelo-Fränkel.

Aristote	Gottfried Wilhelm von Leibniz	Ernst Zermelo	Abraham Fränkel
			
384-322 av. J.-C.	1646-1716	1871-1953	1891-1965