

Sujet 02.4

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

Vendredi 1 octobre 2010

1 Amuse-gueule

Prouver pour tout complexe z que :

$$\frac{|\Re z| + |\Im z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|$$

2 Plat

Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E . Soit ϕ :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \longmapsto (X \cup A, X \cup B) \end{cases}$$

1. Qu'est-ce que $\phi(\emptyset)$? $\phi(E \setminus (A \cup B))$?
2. A quelle condition sur A et B , ϕ est-elle injective ?
3. Est-ce que le couple (\emptyset, B) possède un antécédent par ϕ ?
4. A quelle condition sur A et B , ϕ est-elle surjective ?

3 Dessert

Déterminer $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z) + zf(1-z) = 1+z$.

4 Café historique : nombres complexes

Les nombres complexes font leur apparition au XVI^e siècle. Par goût de généralité dans la résolution des équations, les algébristes italiens se permettent d'écrire formellement $\sqrt{-n}$. On parle alors de racines impossibles. Puis cette écriture devient de moins en moins formelle et de plus en plus fréquente. Après cette phase d'effervescence, la passion pour les nombres complexes reprend au XVIII^e siècle. Wessel, Argand et Gauss proposent une interprétation géométrique des nombres complexes. La construction du corps des nombres complexes date de 1843.

Jérôme Cardan	Raffaele Bombelli	Abraham de Moivre	Leonhard Euler
			
1501-1576	1526-1572	1646-1716	1707-1783