

# Sujet 03.1

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

Vendredi 8 octobre 2010

## 1 Amuse-gueule

On définit sur  $\mathbb{R}_+^*$  la loi de composition interne  $\top : u \top v = uv$  et une loi de composition externe : pour  $a \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $a \cdot u = u^a$ .

Que dire de  $(\mathbb{R}_+^*, \top, \cdot)$  : est-ce un espace vectoriel ?

## 2 Plat

Soit  $E, F$  deux ensembles. Soit  $\phi$  :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F) \\ A \longrightarrow f(A) \end{cases}$$

et  $\psi$  :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ B \longrightarrow f^{-1}(B) \end{cases}$$

Prouver les équivalences suivantes.

1.  $f$  est injective  $\iff \phi$  est injective  $\iff \psi$  est surjective.
2.  $f$  est surjective  $\iff \phi$  est surjective  $\iff \psi$  est injective.

## 3 Dessert

Déterminer  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f(z) + zf(1-z) = 1+z$ .

## 4 Café historique : fonctions élémentaires

On peut être tenté, en voyant les tables de sinus soigneusement réalisées par les astronomes antiques, de croire que la notion de fonction est présente en maths depuis l'éternité. C'est faux ; le mot fut employé pour la première fois par Leibniz, puis un peu précisé par Jean Bernoulli et Euler, et défini vraiment par Dirichlet. Mais on peut considérer Descartes, responsable de l'attribution de coordonnées  $y$  et  $x$  au courbe comme le véritable père de toute notion de fonction.

John Napier	René Descartes	Jean Bernoulli	Leonhard Euler
			
1550-1616	1596-1650	1667-1748	1707-1783