

Sujet 05.4

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

Vendredi 22 octobre 2010

1 Amuse-gueule

Soit E le \mathbb{R} -EV des fonctions deux fois dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et a, b, c trois réels. Soit Δ défini sur E par $\Delta(f) = f'$. Soit $\phi = a\Delta \circ \Delta + b\Delta + c\text{Id}$. Prouver que ϕ est définie et linéaire sur E . Quel est son noyau?

2 Plat

Considérons l'équation différentielle $y' \sin^3 x = 2y \cos x$. Résoudre sur $[0, 4\pi]$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel (si c'en est un) des solutions sur cette intervalle?

3 Dessert

Montrer que dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , la réunion de deux droites n'est jamais un SEV (sauf si...). Que peut-on dire d'analogue au sujet de \mathbb{R}^3 ?