

Sujet 06.2

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

Mercredi 10 novembre 2010 (Colle d'échauffement pour le gala !)

1 Amuse-gueule

Soit une droite D et $F \in D$. Soit M autre part. Combien y a-t-il de paraboles d'axes D et de foyer F qui passent par M ?

2 Plat

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts deux à deux. Démontrer que les propriétés suivantes se valent :

1. $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.
2. j ou j^2 est racine de l'équation $az^2 + bz + c = 0$
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$
4. $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

3 Dessert

1. Vous savez depuis votre plus tendre enfance que la somme des angles d'un triangle fait 180° . Preuve?
2. Il y a plus de 100 preuves élémentaires (sans produit scalaire) du théorème de Pythagore, la première officielle datant d'Euclide. J'en veux au moins une.