

Sujet 06.4

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

Mercredi 10 novembre 2010 (Colle d'échauffement pour le gala !)

1 Amuse-gueule

Soit une conique \mathcal{C} : directrice D , foyer F , excentricité e . Deux points M, M' alignés avec le foyer. Montrer que les tangentes à \mathcal{C} en M et M' se coupent sur D ou sont parallèles!

2 Plat : un alignement spectaculaire!

Prouver que le centre O du cercle circonscrit, l'orthocentre H et le centre de gravité G du triangle ABC sont alignés.
Indication : prouver que $\vec{HO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ est perpendiculaire à \vec{AB} et \vec{BC} .

3 Dessert : un théorème du premier siècle

Soit A, B, C un triangle, $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distincts de A, B, C .. Alors P, Q, R alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$$